Übungsblatt 10

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 15.1.2018

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)
(a) Sei ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$ mit den Seitenlängen $|AB| = 4, |BC| = 5, |AC| = 6$ gegeben. Berechnen Sie Sinus und Kosinus der Innenwinkel, den Flächeninhalt, sowie den Inkreis-und Umkreisradius des Dreiecks.
(b) Leiten Sie die Werte für $\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)$ geometrisch aus der Definition der Winkelfunktionen her. Bestimmen Sie $\cos(\pi/12)$ und $\sin(\pi/12)$ mithilfe der Additionstheoreme. Begründen Sie dabei jeden Ihrer Schritte.

Aufgabe 2 (3 + 1 Punkte)
(a) Sei ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$ mit den Seitenlängen a, b, c gegeben (mit der üblichen Zuordnung). Sei F der Flächeninhalt. Bestimmen Sie die Ankreisradien r_a, r_b und r_c der Ankreise an die Seiten BC, AC bzw. AB aus diesen Größen.
(b) Sei r der Inkreisradius. Beweisen Sie die Formel

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Aufgabe 3 (6 + 4 Punkte)
(a) Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck, $D \in AB$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite AB. Zeigen Sie:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|CB|}.$$

Anmerkung: Sie können trigonometrische Formeln verwenden. Es gibt auch einen sehr schönen und für (b) nützlichen geometrischen Beweis.
(b) Gegeben seien $a, b, w_\gamma > 0$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein Dreieck $\Delta(A,B,C)$, dessen Winkelhalbierende in C die gegenüberliegende Seite AB in D schneide, so dass $|AC| = b, |BC| = a$ sowie $|CD| = w_\gamma$. Begründen Sie die Korrektheit und Durchführbarkeit Ihrer Konstruktion.

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)
(a) Seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf die Seiten BC, AC bzw. AB eines spitzwinkligen Dreiecks $\Delta(A,B,C)$. Beweisen Sie, dass die Höhengeraden $G(A,D), G(B,E)$ und $G(C,F)$ die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(D,E,F)$ sind. Hinweis: Der in der Vorlesung diskutierte 9-Punkte-Kreis ist hier sehr hilfreich.
(b) Wodurch werden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(D,E,F)$ beschrieben, wenn das Dreieck $\Delta(A,B,C)$ stumpfwinklig ist? Sie dürfen den Eckpunkt mit stumpfem Innenwinkel dabei festlegen und die Behauptung aus (a) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben. Hinweis: Jetzt hilft die Idee des Beweises der Behauptung aus der Vorlesung, dass die Mittelpunkte der Höhenabschnitte auf dem Umkreis der Seitenmittelpunkte liegen.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 8.1.–10.1. besprochen werden:

- Leiten Sie die exakten Werte von $\sin(\pi/10)$ und $\cos(\pi/10)$ her. Dabei ist nicht die angenäherte Dezimalsartstellung gesucht sondern ein algebraischer Ausdruck der Form $a+b\sqrt{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und Iterationen davon, d.h. a, b, c sind von der vorigen Form usw. Begründen Sie jeden Schritt bei Ihrer Herleitung. Hinweis: Das "Goldende Dreieck" ist hier nützlich.
- Geben Sie Formeln für $\sin(2x)$ und $\cos(2x)$ in Termen von $\sin x$ und $\cos x$ an.
- Sei der Wert $\sin x = a \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie $\sin(\frac{x}{2})$ als Ausdruck von a. Hinweis: Hier gibt es ein "Vorzeichenproblem".
- Bestimmen Sie die exakten Werte von $\sin(\pi/20)$ und $\cos(\pi/20)$.
- Wiederholen Sie die in der Vorlesung behandelten trigonometrischen Formel, wie z.B. den Sinus-Satz, den Kosinus-Satz, die Heronsche Formel usw.
- Für ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ sei $|\measuredangle(BAC)| = \pi/6$, $|AC| = 1$ und $|AB| = 2$. Bestimmen Sie die Länge der dritten Seite sowie den Sinus der beiden anderen Innenwinkel.
- Es seien die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks gegeben. Der Flächeninhalt sei F. Bestimmen Sie aus diesen Größen den Inkreisradius r, sowie den Umkreisradius R des Dreiecks. Leiten Sie eine Formel für das Produkt rR her.
- **Neun-Punkte-Kreis:** (a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der M_a, M_b der Seiten BC und AC eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ sowie die Mittelpunkte E_a, E_b der Höhenabschnitte AP_H sowie BP_H ein Rechteck bilden.
  (b) Analoges gilt für die anderen zwei Paare von Seiten. Folgern Sie daraus, dass M_a, M_b, M_c zusammen mit E_a, E_b, E_c auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Schnittpunkt der Strecken M_aE_a, M_bE_b und M_cE_c sein muss.
  (c) Zeigen Sie schließlich, dass die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c ebenfalls auf diesem Kreis liegen müssen.
  Hinweis: Hier gibt es viele Mittelpunkte von Strecken und parallele oder senkrechte Geraden. Der Satz des Thales ist ebenfalls hilfreich.