Übungsblatt 11

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 22.1.2018

In allen Aufgaben kann die kartesische Ebene betrachtet werden. Argumente dürfen also analytisch (Rechnen in Koordinaten) oder synthetisch (Kongruenzsätze usw.) oder ein Mix aus beiden sein.

Aufgabe 1 (4 + 1 Punkte)
(a) In einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ bezeichne w_a die Länge der Strecke AD, wobei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Innenwinkels in A mit BC bezeichne. Berechnen Sie w_a in Abhängigkeit der Seitenlängen des Dreiecks. Analog w_b und w_c.
Hinweis: Aufgabe 3 vom Blatt 10 kann nützlich sein. Kontrollergebnis: $w_a^2 = bc(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2)$
(b) Zeigen Sie: Ist $w_a = w_b$ so ist $a = b$, d.h. das Dreieck ist gleichschenklig.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Sei $\Delta(A, B, C)$ gleichseitig und P ein Punkt auf dessen Umkreis im Inneren des Innenwinkels bei B. Zeigen Sie

$$|PA| + |PC| = |PB|.$$

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte)
(a) Seien $m, n > 0$ gegebene reelle Zahlen und P, Q zwei Punkte in der Ebene. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte R mit $|QR|/|PR| = m/n$ ein Kreis oder eine Gerade ist. Beschreiben Sie in jedem Fall die Menge dieser Punkte genau (welche Gerade, welcher Kreis).
(b) Sei $M \in AB$ ein Punkt auf einer Strecke. Was für ein geometrisches Objekt ist die Menge aller Schnittpunkte verschieden von M von je zwei kongruenten Kreisen, die jeweils durch A und M bzw. B und M gehen? Begründen Sie Ihre Antwort. Beschreiben Sie es im Sinn der Aufgabe (a) genau. Hinweis: Experimentieren mit Geometriesoftware (z.B. Geogebra) kann hilfreich sein.

Aufgabe 4 (2 + 3 Punkte)
(a) Sei $ABCD$ ein Quadrat in der kartesischen Ebene, dessen Mittelpunkt der Ursprung $(0, 0)$ ist. Seien $A = (a, b)$ die Koordinaten von A. Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen drei Eckpunkte. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
(b) Sei $ABCD$ ein Quadrat und g eine Gerade durch dessen Mittelpunkt. Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Eckpunkte von g nicht von der Wahl einer solchen Gerade abhängt.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 15.1.–17.1. besprochen werden:

- Bestimmen Sie die Längen der Seitenhalbierenden s_a eines Dreiecks aus gegebenen Seitenlängen b, c und Innenwinkel α. Können Sie dies auch aus den Seitenlängen a, b, c berechnen?
- Zeigen Sie: Ist in einem Dreieck die Länge zweier Seitenhalbierenden gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Sind zwei Höhen gleich, so gilt dies ebenfalls.
- Sei AB ein Durchmesser des Kreises K und $C, D \in K$, so, dass sich AC und BD schneiden. Sei dieser Punkt mit P bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Wert $|AP||AC| + |BP||BD|$ nicht von C, D mit dieser Eigenschaft abhängt.
- Seien P und Q zwei Punkte der Ebene, $a > 0$ eine reelle Zahl. Beschreiben Sie, welches geometrische Objekt die Menge aller Punkte R ist, für die $|PR|^2 + |QR|^2 = a^2$.
- Seien P und Q zwei Punkte der Ebene, a eine reelle Zahl. Beschreiben Sie, welches geometrische Objekt die Menge aller Punkte R ist, für die $|PR|^2 - |QR|^2 = a^2$.
- Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck in der kartesischen Ebene. Bestimmen Sie den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des Umkreises bzw. des Inkreises, sowie deren Radien, den Flächeninhalt,... in Abhängigkeit der Koordinaten der Eckpunkte.