Übungsblatt 12

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 29.1.2018

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $A = (2, -3)$, $B = (6, 4)$ und $C = (10, -4)$ gleichschenklig ist. Ist es spitz-, recht-, oder stumpfwinklig?
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $A = (1, 0)$, $B = (-1, 4)$ und $C = (8, 1)$ sowie den Radius des Umkreises.
(c) Eine Seite eines Quadrats liege auf einer Seitengeraden eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$, während die beiden anderen Eckpunkte des Quadrats auf je einer der anderen beiden Seiten des Dreiecks liegen. Bestimmen Sie die Seitenlänge des Quadrats, falls die Länge der erstgenannten Dreiecksseite und die zugehörige Höhe bekannt sind.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 1 + 1 + 2 Punkte)
(a) Sei $\measuredangle(h, k)$ ein Winkel in $\mathbb{R}^2$ mit Scheitelpunkt P. Seien $A, C \in h$ und $B, D \in k$ mit $|PC| \geq |PA| = |PB|$ und $|PD| \geq |PB|$. Zeigen Sie, dass dann $|CD| \geq |AB|$.
(b) Zeigen Sie die Ungleichung

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$$

für alle $x \in [-\pi/4, \pi/4]$. Hinweis: Die Behauptung der dritten Aufgabe der Rückseite darf benutzt werden.
(c) Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion in $x = 0$ differenzierbar ist.
(d) Zeigen Sie, dass die Kosinusfunktion in $x = 0$ differenzierbar ist.
(e) Zeigen Sie schließlich, dass die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion überall differenzierbar sind und für die Ableitungen $\sin' = \cos$ sowie $\cos' = -\sin$ gilt.
Anmerkung: Für (b)-(e) dürfen die aus der Analysis bekannten Tatsachen des Sinus und des Kosinus NICHT verwendet werden. Weiterhin sollen die geometrischen Definitionen der beiden Funktionen und nicht die analytischen (via Potenzreihen) zugrundegelegt werden.

Aufgabe 3 (3 + 1 + 1 Punkte)
Für der geometrische Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, |.|)$ seien alle Axiome außer dem Parallelenaxiom vorausgesetzt.
(a) Zeigen Sie, dass Spiegelungen an Geraden darin Isometrien sind.
(b) Eine Isometrie $\Psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ habe (wenigstens) zwei verschiedene Fixpunkte P und Q. Welche Abbildung kann Ψ dann nur sein? Begründen Sie Ihre Antwort.
(c) Sei $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie der Ebene und g eine Gerade, $S_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die zugehörige Spiegelung. Zeigen Sie, dass $\Phi \circ S_g \circ \Phi^{-1}$ eine Spiegelung an einer Geraden ist und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 4 (3 + 2 Punkte)
Sei eine geometrische Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, |.|)$ gegeben, für die alle Axiome außer dem Parallelenaxiom vorausgesetzt seien.
(a) Seien drei Geraden, die durch einen Punkt P gehen, gegeben. Wir studieren die Verknüpfung der drei dazu gehörenden Spiegelungen. Welcher Punkt ist offensichtlich ein Fixpunkt? Zeigen Sie, dass diese Verknüpfung eine Spiegelung ist und ermitteln Sie die Spiegelungsgerade?
Hinweis: Betrachten und berechnen Sie geeignete Winkel in P. Experimentieren Sie auch mit Geogebra - sei es, um eine Idee zu bekommen oder um eine Idee zu testen.
(b) Seien drei Geraden gegeben, die sich paarweise in insgesamt drei verschiedenen Punkten schneiden. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung der drei zugehörigen Spiegelungen keinen Fixpunkt besitzt.
Hinweis: "Verfolgen" Sie einen als Fixpunkt vorausgesetzten Punkt unter den drei Spiegelungen.
$(c)^*$ (ohne Wertung) Können Sie (b) für allgemeinere Tripel von Geraden verallgemeinern? Gibt es dafür Unterschiede für euklidische Ebenen und für solche, für die das Parallelenaxiom nicht gilt?

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 22.1.–24.1. besprochen werden:

- Bestimmen Sie die längste Seite des Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $A=(-3,1)$, $B=(4,2)$ und $C=(3,-1)$. Bestimmen Sie den Winkel, der dieser Seite gegenüberliegt.
- Sei einem rechtwinkligen Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ein Quadrat so einbeschrieben, dass eine komplette Seite auf der Hypothenuse liegt, während die verbliebenen beiden Eckpunkte auf je einer Kathete liegen. Zeigen Sie, dass die Seitenlänge des Quadrats das geometrische Mittel der Längen der beiden Strecken ist, in die das Komplement der Quadratseite in der Hypothenuse zerfällt.
- Wiederholung aus der Vorlesung: Die Punkte seien wie in Aufgabe 2 (a) gegeben. Sei weiterhin für alle Punkte $E \in CD$ $|PE| \geq 1 = |PA| = |PB|$. Zeigen Sie, dass dann $|CD| \geq |\measuredangle(h,k))|$, d.h. größer als die Länge des Bogenmaßes des Winkels ist. Die Behauptung von Aufgabe 1 (a) der Vorderseite darf benutzt werden.
- Sei eine geometrische Ebene $(\mathcal{E},\mathcal{G},d,|.|)$ gegeben, für die alle Axiome außer dem Parallelenaxiom vorausgesetzt seien. Zeigen Sie, dass Punktspiegelungen darin Isometrien sind.
- Sei P ein Punkt $S_P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Punktspiegelung in P. Sei $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie der Ebene. Zeigen Sie, dass $\Phi \circ S_P \circ \Phi^{-1}$ eine Punktspiegelung ist und bestimmen Sie den Spiegelungspunkt.
- Zeigen Sie, dass die Verknüpfung zweier Punktspiegelungen mit verschiedenen Zentren P und Q keine Fixpunkte besitzt. Bestimmen Sie, welche Abbildung das im euklidischen Fall ist, d.h. wenn das Parallelenaxiom gilt.