Übungsblatt 13

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 5.2.2018

Aufgabe 1 (4+2+2+2 Punkte)
(a) Seien $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ und $D \in BC \setminus \{B; C\}$, $E \in AC \setminus \{A; C\}$, F der Schnittpunkt von AD und BE, sowie G der Schnittpunkt der Gerade $G(C, F)$ mit AB. Zeigen Sie, dass DE genau dann parallel zu AB ist, wenn G der Mittepunkt der Seite AB ist.
(b) Seien eine Strecke mit ihrem Mittelpunkt sowie ein Punkt, der nicht auf der zugehörigen Geraden liegt, gegeben. Konstruieren Sie nur mithilfe eines Lineals die Parallele zur Strecke durch den Punkt. Die Skalierung des Lineals darf dabei nicht benutzt werden. (6 Geraden)
(c) Seien eine Strecke sowie eine dazu parallele Gerade (auf der die Strecke nicht liege) gegeben. Konstruieren Sie nur mithilfe eines Lineals (im gleichen Sinn, wie in (b)) den Mittelpunkt der Strecke. (5 Geraden)
(d) Sei ein Kreis und sein Mittelpunkt sowie ein Punkt auf dem Kreis gegeben. Konstruieren Sie nur mithilfe eines Lineals ein dem Kreis einbeschriebenes Quadrat, dessen einer Eckpunkt der gegebene Punkt ist. (16 Geraden)

Aufgabe 2 (2+3+2+2+1 Punkte)
Mit dieser Aufgabe beschäftigen Sie sich ein weiteres Mal mit einem Beweis der Additionstheoreme der Winkelfunktionen.
(a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis mit $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ und $w = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi$ mit $\psi, \varphi \in (0, \pi)$. Zeigen Sie, dass dann das Produkt zw und 1 auf verschiedenen Seiten der Geraden $\{tz \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch 0 und z liegen.
(b) Zeigen Sie, dass der Winkel $|\measuredangle((zw)0z)| = \psi$ ist Hinweis: Zeigen und nutzen Sie, dass die Abbildung $x \in \mathbb{C} \mapsto zx \in \mathbb{C}$ eine Isometrie ist.
(c) Folgern Sie, dass $zw = \cos(\varphi + \varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)$ ist.
(d) Zeigen Sie schließlich die Formeln der Additonstheorme für Argumente $\varphi, \psi \in (0, \pi)$
(e) Erläutern Sie, wie die Additionstheoreme für allgemeine Werte folgen.

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)
Es seien $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$\phi_1(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right),$$

$$\phi_2(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(a) Bestimmen Sie, welche der Abbildungen Isometrien sind
(b) untersuchen Sie gegebenenfalls ob es eine Spiegelung oder eine Drehung ist. Bestimmen Sie auch die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)
Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ in einer Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d.|.|)$, in der das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt ist, gegeben und w_a, w_b, w_c die Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Beschreiben Sie die Verknüpfung der Spiegelungen
(a) $S_{w_c} \circ S_{w_b} \circ S_{w_a}$ sowie
(b) $S_{w_a} \circ S_{w_c} \circ S_{w_b} \circ S_{w_a}$.
Hinweis: Betrachten Sie den Inkreis.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 29.1.–31.1. besprochen werden:

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil x, y einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$, die
$$z^2 = a + \mathrm{i}b$$
erfüllt.

- Welche der folgenden Abbildungen $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind Isometrien?
$$\phi_1(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \right),$$
$$\phi_2(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \right).$$
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.

- Seien h und k zwei Geraden in einer Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d.|.|)$, in der das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt ist, die sich in P schneiden. Sei $Q \neq P$ und $Q' := S_h(S_k(Q))$. Zeigen Sie, dass $|\measuredangle(QPQ')| = \min(2\varphi, 2\pi - 2\varphi)$, wobei φ das Winkelmaß $\varphi = |\measuredangle(h', k')|$ ist, für Strahlen $h' \subset h$ und $k' \subset k$ in P.

- Betrachten Sie das vorige Problem in $\mathbb{R}^2$. Sei $P = (0, 0)$ der Ursprung. Beschreiben Sie die Geraden h, k durch ihre Winkel mit der x-Achse (siehe Vorlesung). Bestimmen Sie nun S_h und S_k als affine Abbildung und berechnen Sie deren Verknüpfung $S_h \circ S_k$.

- Was ist die Verknüpfung zweier Drehungen mit verschiedenen Drehzentren? Finden Sie die Antwort zuerst analytisch mithilfe der Beschreibung als affine Abbildung und dann geometrisch mithilfe der Beschreibung einer Drehung mithilfe von Spiegelungen. Beschreiben Sie das Ergebnis geometrisch.