Übungsblatt 14

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 12.2.2018

Hinweis: Das ist das letzte Übungsblatt mit Hausaufgaben.

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)
(i) Zeigen Sie: Die Verknüpfung zweier Streckungen oder Stauchungen (mit eventuell verschiedenen Streckungszentren) ist entweder eine Verschiebung oder eine Streckung/Stauchung. Beschreiben Sie, wann welcher Fall eintritt und drücken Sie die geometrischen Daten, die die Verknüpfung beschreiben, mit den Daten der Ausgangsabbildungen aus.
(ii) Zeigen Sie, dass $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$ für zwei 2×2–Matrizen A, B mit $\det A = \det B = 1$ ist und schließen Sie, dass $\Phi_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ bijektiv ist. Bestimmen Sie die inverse Abbildung explizit in Termen der Einträge von A.

Aufgabe 2 (3 + 2 + 3 + 2 Punkte)
(i) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Verknüpfung zweier Kreisspiegelungen an verallgemeinerten Kreisen (als Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel auf sich) eine Möbiustransformation ist.
(ii) Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation mit drei Fixpunkten die Identität ist.
(iii) Seien $K, L \subset \overline{\mathbb{C}}$ verallgemeinerte Kreise, $L' := S_K(L)$ das Bild unter der Spiegelung an K. Zeigen Sie, dass für die Verknüpfung

$$S_K \circ S_L \circ S_K = S_{L'}$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie Fixpunktmengen und nutzen Sie (i) und (ii).
(iv) Welche Möbiustransformationen können nicht die Verknüpfung zweier Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen sein? Hinweis: Die Fixpunktmenge kann eine erhebliche Einschränkung ergeben.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
(i) Zeigen Sie für die Spiegelung S am Kreis $K(0, r)$ die Beziehung $D(S(z_1), S(z_2), S(z_3), S(z_4)) = \overline{D(z_1, z_2, z_3, z_4)}$. Folgern Sie, dass die letzte Formel für alle Spiegelungen an Kreisen gilt (siehe Rückseite).
(ii) Weisen Sie nach, dass die Gleichung unter (i) auch für Geradenspiegelungen gilt.
(iii) Zeigen Sie: Vier verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{C}$ liegen genau dann auf einem gemeinsamen verallgemeinerten Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis eine reelle Zahl ist. Hinweis: (i) und (ii) sind hierfür nützlich.
(iv) Folgern Sie, dass Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen verallgemeinerte Kreise in solche überführen.

Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
(i) Sei A eine reelle 2×2–Matrix mit $\det A = 1$. Zeigen Sie, dass $\Phi_A|_{\mathbb{H}}$ eine Bijektion der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ auf sich ist.
(ii) Zeigen Sie, dass eine Spiegelung an einem verallgemeinerten Kreis, dessen Mittelpunkt auf $\mathbb{R}$ liegt oder der eine Gerade senkrecht zu $\mathbb{R}$ ist, ebenfalls eine solche Bijektion ist.
(iii) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung zweier verallgemeinerter Kreise aus (ii) eine Möbiustransformation aus (i) ist.
(iv) Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation aus (i) eine Verknüpfung zweier Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen aus (ii) ist.

Sei $A \in M(2;\mathbb{C})$ eine 2×2–Matrix mit $\det(A) = 1$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir haben die **Möbiustransformation** $\Phi_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$\Phi_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \neq -\frac{d}{c}, \infty \\ \frac{a}{c} & \text{falls } z = \infty \\ \infty & \text{falls } z = -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Folgender Begriff wird in der Vorlesung am Montag, den 5.2. behandelt:
Das **Doppelverhältnis** ordnet einem Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) in $\overline{\mathbb{C}}$ von denen höchstens zwei Einträge übereinstimmen ein Element in $D(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}$ zu, wobei

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

für paarweise verschiedene Elemente $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ mit der offensichtlichen Bedeutung falls einer der Einträge gleich ∞ ist und $\lim_{z \to z_2} D(z, z_2, z_3, z_4) = 1, \lim_{z \to z_3} D(z, z_2, z_3, z_4) = 0, \lim_{z \to z_4} D(z, z_2, z_3, z_4) = \infty$ usw.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 5.2.–7.2. besprochen werden

- Sei S die Spiegelung an einem Kreis $K = K(0, r)$. Zeigen Sie, dass für eine in $t = 0$ differenzierbare Abbildung $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{C}$ die Verknüpfung $S \circ \gamma$ wieder differenzierbar ist und
$$(S \circ \gamma)'(0) = -\frac{r^2}{\overline{\gamma(0)}} \overline{\gamma'(0)}$$
ist, d.h. führen Sie die Behauptung aus der Vorlesung näher aus. Wiederholen Sie das Argument für Möbiustransformationen.

- Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis invariant unter Translationen, Drehungen und Streckungen/Stauchungen ist.

- Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation $L : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ das Doppelverhältnis erhält:
$$D(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = D(z_1, z_2, z_3, z_4).$$
Beginnen Sie mit der Abbildung $z \in \overline{\mathbb{C}} \mapsto \frac{1}{z} \overline{\mathbb{C}}$ und benutzen Sie die vorhergehende Aussage.

- Zeigen Sie, dass Möbiustransformationen veralllgemeinerte Kreise in solche überführen und winkelerhaltend im gleichen Sinn wie Spiegelungen an Kreisen sind. Sie können dies so ähnlich durchführen, wie das Argument für Kreisspiegelungen aus der Vorlesung oder Sie können Aufgabe 3 verwenden. Der erste Teil kann aus der vorangegangenen Behauptung und Aufgabe 3 (iv) gefolgert werden.

- Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation eine Verknüpfung von maximal vier Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen ist:
(i) Verwenden Sie die Idee einer ähnlichen(!) Aussage über Isometrien aus der Vorlesung, bis Sie eine Möbiustransformation mit zwei Fixpunkten erhalten.
(ii) Finden Sie nun eine Spiegelung an einem verallgemeinerten Kreis mit denselben Fixpunkten, so dass die Verknüpfung einen Kreis durch diese beiden Punkte in sich überführt.
(iii) Zeigen Sie nun, dass diese Verknüpfung sogar den ganzen Kreis als Fixpunktmenge besitzt. Das Doppelverhältnis und seine Eigenschaften sind dafür nützlich.
(iv) Nun muss nochmal an einem verallgemeinerten Kreis gespiegelt werden, damit die gesamte Verknüpfung eine Möbiustransformation wird. An welchem?