Übungsblatt 15

Geometrie WS 2017/18

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 12.2.–14.2. besprochen werden.

Aufgabe 1
In der Vorlesung werden für das Poincaré-Modell der oberen Halbebene die Axiome der absoluten Geometrie nachgewiesen. Welche Eigenschaften des Abstandes, von Dreiecken usw. folgen daraus? Welche Eigenschaften der euklidischen Geometrie gelten nicht?

Aufgabe 2
(i) Zeigen Sie, dass jedes hyperbolische Dreieck in $\mathbb{H}$ einen Inkreis besitzt.
(ii) Zeigen Sie: schneiden sich die Mittelsenkrechten zweier Seiten eines hyperbolischen Dreiecks in $\mathbb{H}$ in einem Punkt, so schneiden sich alle drei Seitenmittelsenkrechten in einem Punkt. Außerdem besitzt das Dreieck genau dann einen Umkreis. Geben Sie ein Beispiel für ein hyperbolisches Dreieck in $\mathbb{H}$ an, in dem dies nicht der Fall ist. Diskutieren Sie den entsprechenden Fakt für euklidische Dreiecke. Welche Eigenschaft muss in einem korrekten Beweis für die Existenz eines Umkreises benutzt werden?
$(iii)^*$ Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden eines hyperbolischen Dreiecks in einem Punkt schneiden. Schneiden Sie sich (wie im eukidischen) im Verhältnis $2:1$?

Aufgabe 3
Der Abstand zweier Geraden g, h sei definiert als

$$d(g,h) := \inf\{d(P,h) \mid P \in g\}$$

(a) Zeigen Sie, dass $d(g,h) = d(h,g)$ gilt.
(b) Berechnen Sie in $\mathbb{H}$ den Abstand $d(G_0, K_{1,1})$
(c) Berechnen Sie in $\mathbb{H}$ den Abstand $d(K_{0,1}, K_{0,2})$
Hierbei sei $G_a := \{a\} \times i\mathbb{R} \cap \mathbb{H}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $K(a,r) \subset \mathbb{H}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ der Teil des Kreises um a mit Radius r, der in $\mathbb{H}$ liegt.
Hinweis: Führen Sie auch bei Grenzwertbetrachtungen elementargeometrische Überlegungen an.

Aufgabe 4
(a) Zwei hyperbolische Geraden in $\mathbb{H}$ heißen **asymptotisch parallel**, wenn sie sich nicht schneiden aber die sie definierenden euklidischen Objekte (Kreise oder Geraden) einen gemeinsamen Punkt auf $\mathbb{R}$ besitzen. Zeigen Sie dass $d(g,h) = 0$ für zwei asymptotisch parallele Geraden. Zeigen Sie: Dann existiert keine Gerade, die g und h orthogonal schneidet. Mehr noch: es existiert keine Gerade, die zwei verschiedene, asymptotisch parallele Geraden mit kongruenten Stufenwinkeln schneidet.
(b) Zeigen Sie, dass es für zwei parallele aber nicht asymptotisch parallele Geraden g und h Punkte $P \in g$ und $Q \in h$ gibt, mit $d(P,Q) = d(g,h)$. Zeigen Sie, dass PQ senkrecht auf g und auf h steht.