Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 06.11.2017

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
(a) Bestimmen Sie einen quadratischen, algebraischen Ausdruck in den Koordinaten der drei Punkte $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ und $C = (x_3, y_3)$ in $\mathbb{R}^2$ der genau dann Null wird, wenn diese kollinear sind.
(b) Seien A, B, C, D und E Punkte in $\mathbb{R}^2$. F ist der Mittelpunkt von AB, G ist der Mittelpunkt von BC, H der Mittelpunkt von CD und K der Mittelpunkt von DE. Sei weiterhin L der Mittelpunkt von FH und M der Mittelpunkt von GK. Beweisen Sie, dass LM parallel zu AE ist. Hängt das Verhältnis der Streckenlängen $|AE|$ und $|LM|$ von der Wahl von A, B, C, D und E ab?

Aufgabe 2 (2+3+1+4 Punkte)
(a) Zerteilen Sie die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit so wenig wie möglich Geraden in fünf konvexe Teile, d.h. finden Sie eine möglichst kleine Zahl von Geraden, so dass deren Komplement die Vereinigung von fünf konvexen Mengen ist.
(b) Zeigen Sie: in einem Viereck in $\mathbb{R}^2$ verläuft jede Diagonale komplett im Inneren oder komplett im Äußeren (Eine Definition von 4-Eck findet sich der Vollständigkeit halber auf der Rückseite. Am Ende gilt: "Ein (sich nicht überschlagenes) Viereck ist genau das, was Sie gedacht hatten, was es ist.").
(c) Zeigen Sie, dass die Aussage (b) im Allgemeinen für Fünfecke nicht stimmt (5-Eck - siehe Anmerkung bei (b)).
(d) Wieviele Schnittpunkte von Diagonalen im Inneren eines konvexen 6-Ecks in $\mathbb{R}^2$ kann es maximal geben? Geben Sie ein Beispiel an (eine saubere Skizze genügt), in dem das Maximum angenommen wird. Welche Anzahlen von Schnittpunkten kann es in einem konvexen Fünfeck überhaupt geben? Begründen Sie Ihre Antworten.
(d)* Welche Anzahlen von solchen Schnittpunkten kann es in einem **beliebigen** sich nicht überschlagenen Fünfeck geben?
Hinweis: Diese Aufgabe soll Ihre Intuition für Inzidenz und Lageverhältnisse schärfen. Die Begründung kann durch Skizzen unterstützt werden und Sie sollen dann **kurz** erläutern, warum Ihre Skizzen (Mehrzahl!) korrekt sind und alle Möglichkeiten erfassen. Beispiel: "In $\mathbb{R}^2$ gilt: Schneiden sich zwei Gerade in einem Punkt, so muss wenigstens eine von ihnen eine beliebige dritte Gerade schneiden."

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass aus dem Inzidenzaxiom, dem Abstandsaxiom und dem Postulat von Pasch das Trennungsaxiom folgt.
(b) Es gelten das Inzidenzaxiom, das Abstandsaxiom und das Trennungsaxiom. Zeigen Sie: Eine Gerade geht genau dann durch einen Punkt im Inneren des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$, wenn sie den Rand des Dreiecks genau in zwei Punkten schneidet.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 30.-01.11. besprochen werden:

- Beweisen Sie, dass die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ sich im Punkt S schneiden, der durch $S := (A + B + C)/3$ gegeben ist. In welchem Verhältnis teilt S die Seitenhalbierenden?

- (Ebene mit fehlendem Streifen.) Sei $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1) \times \mathbb{R}$ die Ebene und die Geraden seien durch den Durchschnitt der kartesischen Geraden mit dieser Menge gegeben (ohne die leeren Durchschnitte!). Prüfen Sie das Inzidenzaxiom. Sei der Abstand für $P, Q \in \mathcal{E}$ wie folgt definiert
$$d(P, Q) = |PQ| - |PQ \cap [0, 1] \times \mathbb{R}|.$$
falls $G(P, Q) \neq \{1\} \times \mathbb{R}$ und $d(P, Q) = |PQ|$ in diesem speziellen Fall. Wir benutzen hier, dass $|PQ \cap [0, 1] \times \mathbb{R}|$ ebenfalls eine Strecke ist und die Streckenlänge $|AB|$ für Strecken in der kartesischen Ebene. Zeigen Sie das mit d auch das Abstandsaxiom gilt. Begründen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass das Trennungsaxiom nicht gilt.

- Eine Streckenzug ist gegeben durch eine endliche Folge $A_1, A_2, ..., A_n$ von Punkten, wobei A_k verschieden von A_{k+1} ist. Er heiße konvex, falls für alle Geraden $G(A_k, A_{k+1})$ alle A_ℓ mit $\ell \neq k, k + 1$ auf derselben Seite liegen. Kann sich so ein Streckenzug selbst schneiden, d.h. $A_jA_{j+1} \cap A_kA_{k+1} \neq \emptyset$ für ein Paar (j, k) mit $j - k \geq 2$?

- Eine ad-hoc-Definition für Polygone: Ein Dreieck, d.h. 3-Eck ist durch drei nicht kollineare Punkte $A_1A_2A_3$ gegeben. Das Innere des Dreiecks ist der Durchschnitt $\mathcal{H}_+(AB, C) \cap \mathcal{H}_+(BC, A) \cap \mathcal{H}_+(AC, B)$. Sei $A_1A_2...A_{n-1}$ ein $(n - 1)$-Eck ($n \geq 4$) und sei das Innere definiert. Sei A_n ein Punkt, so dass A_nA_{n-1} und A_1A_n mit dem Inneren und allen Seiten A_kA_{k+1} des $(n - 1)$-Ecks einen leeren Durchschnitt haben (bis auf die beiden Punkte A_1 und A_{n-1} natürlich). Dann ist $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ ein n-Eck dessen Inneres die Vereinigung des Inneren des $(n - 1)$-Ecks, des Inneren des Dreiecks $\Delta(A_{n-1}A_nA_1)$ und der Strecke $A_{n-1}A_1$ ist. Fertigen Sie eine Skizze an.

  Ein geschlossener Streckenzug ist ein Streckenzug $A_1A_2...A_nA_1$, d.h. mit $A_1 = A_{n+1}$. Wir nehmen an, dass sich dieser nicht selbst schneidet und konvex ist. Zeigen Sie, dass $A_1A_2..A_n$ dann ein n-Eck und dessen Inneres eine konvexe Menge ist. Hinweis: Beschreiben Sie das Innere als Durchschnitt von geeigneten Halbebenen (Seiten von Geraden).

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung und beruhen auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule:

- Formulieren Sie den Satz des Thales und die Sätze des Pythagoras. Skizzieren Sie die Beweise.

- (*) Können Sie eine Konstruktion der Senkrechten in einem Punkt auf der Geraden oder des Lotes von einem Punkt auf die Gerade mit nur drei Schritten angeben (1 Schritt entspricht einem konstruierten Objekt, d.h. Gerade, Strahl, Kreis etc.)? Die Auswahl eines Punktes (beliebig, auf einer Geraden, aus der menge von zwei Schnittpunkten usw.) ist kein Konstruktionsschritt. Begründen Sie die Konstruktion.

- Was ist der In- bzw. Umkreis eines Dreiecks? Wie beweisen Sie, dass diese immer existieren und eindeutig sind? Leiten Sie daraus eine Konstruktion dieser mit Zirkel und Lineal ab.