Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 13.11.2017

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
Beweisen Sie folgende zwei Aussagen:
(a) Die Winkelhalbierende eines Winkels bildet mit der Winkelhalbierenden seines Nebenwinkels einen rechten Winkel.
Hinweis: Satz 9 der Vorlesung kann hilfreich sein. Wenn Sie ihn verwenden, müssen Sie begründen, warum Sie das dürfen. Hierfür ist die Betrachtung der Winkelmaße der Winkel, an denen je einer der Schenkel des gestreckten Winkels beteiligt ist, hilfreich.
(b) Seien Strahlen h, k, l, m in O gegeben, so dass die Paare h und k, l und m, k und l bzw. h und m nicht auf einer Geraden liegen. Das Innere der vier Winkel, $\angle(h,k)$, $\angle(l,m)$, $\angle(k,l)$ und $\angle(h,m)$ enthalte weiterhin keinen der jeweils verbleibenden zwei Strahlen. Fertigen Sie eine korrekte Skizze dieser Situation an, in der keine zwei Strahlen auf einer Geraden liegen. Seien nun die Winkel $\angle(h,k)$ und $\angle(l,m)$ kongruent, sowie $\angle(k,l)$ und $\angle(h,m)$ kongruent. Zeigen Sie: Dann liegen h und l bzw. k und m auf einer Geraden. Skizzieren Sie ein Gegenbeispiel, in dem die Kongruenzen gelten aber nicht die geforderten Bedingungen an die Lageverhältnisse der Strahlen.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
(a) An die beiden Schenkel eines Winkels werden jeweils auf die Seite des anderen Schenkels Winkel von 45^o abgetragen. Der Winkel, den die neuen Strahlen bilden betrage 72^o. Wie groß ist der ursprüngliche Winkel? Gibt es mehrere Möglichkeiten? Begründen Sie Ihre Antwort.
(b) Drei Geraden schneiden sich in einem Punkt. Wieviele verschiedene Winkel können maximal dabei gebildet werden (der gestreckte Winkel zählt hier nicht als Winkel). Zwei der Winkel betragen 25^o bzw. 55^o. Wie lauten die Größen der anderen Winkel? Bestimmen Sie alle möglichen Antworten.

Aufgabe 3 (2+8 Punkte)
(a) Beschreiben Sie den Kreis in $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $r > 0$ als Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in den Koordinaten der Punkte.
(b) Beweisen Sie den Satz des Thales in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Abstand und dem Bogenmaß für die Winkel: Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ die Endpunkte des Durchmessers eines Kreises und C verschieden von A und B ein weiterer Punkt. Dann ist $\angle(ACB)$ genau dann ein rechter Winkel, wenn C auf dem Kreis liegt.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 06.11.–08.11. besprochen werden:

- Wie hängen Winkelgrad und Bogenmaß zusammen? Was ist das Bogenmaß eines Winkels von 30^o bzw. 60^o? Was ist der Winkelgrad des Winkels mit Bogenmaß $\frac{\pi}{5}$?
- Zeichnen Sie zwei Geraden, die sich in einem Punkt P schneiden und einen Winkel von 19^o einschließen unter Zuhilfenahme eines Winkelmessers. Zeichnen Sie mit einem Zirkel einen Kreis um P, der beide Geraden je zweimal schneidet. Bestimmen Sie nun nur unter Zuhilfenahme des Zirkels einen Punkt Q auf dem Kreis, so dass die Gerade durch P und Q mit einer der beiden anderen Geraden einen Winkel von 1^o einschließt. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion.
- Seien h und h' zwei entgegengesetzte Strahlen auf einer Geraden. Seien k und l zwei Strahlen auf verschiedenen Seiten dieser Geraden, so dass $\angle(h,k) \equiv \angle(h',l)$. Zeigen Sie, dass dann k und l entgegengesezte Strahlen auf einer Geraden sind.
- Sei $\mathcal{H}$ eine Halbebene, d.h. Seite, bezüglich einer Geraden g und $O \in g$ ein Punkt. Seien h, k, l und m vier (verschiedene) Strahlen O, die nicht in $\mathcal{H}$ liegen. Seien $\angle(k,l)$ und $\angle(h,m)$ rechte Winkel. Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\angle(h,k)$ und $\angle(l,m)$ übereinstimmen oder einen rechten Winkel bilden. Charakterisieren Sie die Lageverhältnisse der Strahlen, in denen die eine und in denen die andere Aussage eintritt.
- Seien h, k, l und m vier (verschiedene) Strahlen einer Ebene in einem Punkt O. Seien $\angle(k,l)$ und $\angle(h,m)$ rechte Winkel. Diskutieren Sie unter Ausnutzung der vorigen Aufgabe und der Behauptung von Aufgabe 1 (a), welche möglichen Winkel die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\angle(h,k)$ und $\angle(l,m)$ bilden können. Charakterisieren Sie wieder für jeden dieser Fälle die Lageverhältnisse der Strahlen, in denen dieser eintritt.
- Zeigen Sie den Satz des Pythagoras in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Abstand und dem Bogenmaß für die Winkel: Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck in der kartesischen Ebene. Dann ist der Innenwinkel in C genau dann ein rechter Winkel, wenn

  $$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

  Warum ist das kein überzeugener geometrischer Beweis?