Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 20.11.2017

Aufgabe 1 (4+5+1 Punkte)
(a) Es sei eine Strecke AB gegeben. In A sei ein Strahl gegeben, der nicht auf der Geraden $G(A, B)$ liege sowie ein Punkt C darauf. In B werde ein Strahl auf die Seite von $G(A, B)$ konstruiert, die C nicht enthält sowie ein Punkt D darauf, so dass der Winkel $\measuredangle(CAB) \cong \measuredangle(DBA)$ und $AC \cong BD$:
(i) Zeigen Sie, dass sich die Strecke CD die Strecke AB im Inneren schneiden.
(ii) Beweisen Sie, dass der Schnittpunkt der beiden Strecken der Mittelpunkt von AB ist.
(b) Sie haben außer Ihrem Stift keine üblichen Zeichengeräte dabei. Was könnten Sie benutzen, um für eine gegebene Strecke den Mittelpunkt zu konstruieren?

Aufgabe 2 (2+8 Punkte)
Beweisen Sie, dass in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den dafür definierten Geraden, dem euklidischen Abstand und dem Bogenmaß für Winkel das Kongruenzaxiom SWS gilt:
(a) Zeigen Sie zuerst, dass die Länge der dem gegebenen Winkel gegenüberliegenden Seite durch dessen Bogenwinkelmaß und die gegebenen Seitenlängen bestimmt ist, indem Sie eine Formel dafür herleiten.
(b) Zeigen Sie dann, dass die Bogenwinkelmaße jeder der verbleibenden Innenwinkel durch die nun bekannten Größen bestimmt ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Beweisen Sie den Kongruenzsatz $[WWS]$ für Dreiecke ohne das Parallelenaxiom oder seine Folgerungen, wie beispielsweise den Innenwinkelsatz im Dreieck zu verwenden.
Hinweis für einen möglichen Lösungsweg: Zeigen Sie zuerst, dass das übriggebliebene Paar von Winkeln ebenfalls kongruent ist, indem Sie den entsprechenden Innenwinkel des einen Dreiecks im anderen Dreieck abtragen (siehe Beweis von [WSW] in der Vorlesung). Verwenden Sie den schon bewiesenen Kongruenzsatz [WSW] und den Satz vom Außenwinkel.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 13.11.–15.11. besprochen werden:

- Wie ist Konvexität für Teilmengen einer geometrischen Ebene definiert? Beweisen Sie: Der Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist wieder konvex. Folgern Sie, dass Innere von Dreiecken und Winkeln konvex sind. Gilt das allgemein auch für die Vereinigung konvexer Mengen? Zeigen Sie, dass abgeschlossene Halbebenen (also eine Seite einer Gerade vereinigt mit dieser) konvex sind. Folgern Sie daraus, dass das Innere eines Dreicks vereinigt mit den Seiten konvex ist und analog das Innere eines Winkels vereinigt mit den Schenkeln.

- Wie ist die Mittelsenkrechte einer Strecke AB definiert? Zeigen Sie, dass die Mittelsenkrechte genau die Menge aller Punkte ist, die zu A und B denselben Abstand haben. Hinweis: Ihr Beweis muss zwei Richtungen enthalten.
  Können Sie daraus sofort schließen, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in einem Punkt schneiden und somit ein Umkreis existiert?

- Berechnen Sie die Länge von einer der Höhen in einem Dreieck in $\mathbb{R}^2$

  (a) in Termen des Winkelmaßes eines Winkels und der Längen der ihn einschließenden Seiten, wobei die Höhe auf einer dieser Seiten senkrecht stehe oder
  (b) in Termen der Seitenlängen der drei Seiten des Dreiecks.

  Benutzen Sie das Ergebnis, um den Flächeninhalt (wie üblich durch Höhe und Grundlinie gegeben) wie in (a) und auch wie in (b) auszudrücken.

- Beweisen Sie den Kongruenzsatz [SsW] für Dreiecke. Hinweis: Seien $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ mit $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle(ACB) \cong \angle(A'C'B')$ sowie $|AB| > |BC|$ gegeben. Tragen Sie die dritte Strecke AC geeignet am Dreieck $\Delta(A', B', C')$ ab.
  An welcher Stelle geht die spezielle Voraussetzung von $[SsW]$, nämlich $|AB| > |BC|$ ein?.