Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 27.11.2017

Aufgabe 1 (3+7 Punkte)
Eine Konstruktion der Winkelhalbierenden: Sei $\angle(h,k)$ ein Winkel mit Scheitelpunkt O. Seien A, B zwei verschiedene Punkte auf h und C, D auf k, alle verschieden von O.
(a) Sei $A \in OB$ und $C \in OD$. Zeigen Sie, dass sich die Strecken AD und BC im Inneren des Winkels $\angle(h,k)$ schneiden.
(b) Sei P der Schnittpunkt aus (a). Sei weiterhin $OA \cong OC$ und $OB \cong OD$. Beweisen Sie, dass der Strahl in O durch P die Winkelhalbierende ist.
Hinweis: Die Verwendung des Kongruenzsatzes [SsW] in dieser Aufgabe führt sehr oft zu Fehlern. Für den Beweis wird er nicht unbedingt benötigt.

Aufgabe 2 (3+2+1+1 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierende genau die Menge aller Punkte im Inneren des Winkels $\angle(h,k)$ ist, deren Lote auf h bzw. k gleichlang sind, d.h. die von den Geraden die h bzw. k enthalten, denselben Abstand haben.
(b) Erläutern Sie, warum sich die Winkelhalbierende zweier Innenwinkel eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.
(c) Folgern Sie, dass sich die drei Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden
(d) Zeigen Sie, dass dieser Punkt der Mittelpunkt des Inkreises ist, d.h. des Kreises, der jede der Seiten in genau einem Punkt schneidet.

Aufgabe 3 (7+3 Punkte)
Bis auf das Parallelenaxiom seien alle Axiome vorausgesetzt. Es seien zwei Dreiecke $\Delta(A,B,C)$ und $\Delta(A',B',C)$ gegeben mit $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$.
(a) Zeigen Sie: Wenn $|\measuredangle(ABC)| > |\measuredangle(A'B'C')|$ ist, dann ist auch $|AC| > |A'C'|$.
(b) Erläutern Sie, wie aus der Gültigkeit von (a) für beliebige Dreiecke mit den geforderten Bedingungen die Umkehrung dieser Aussage folgt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Auf einem Blatt Papier sind zwei gerade Linien (Stücke von Geraden) bis zum Rand des Blattes gezeichnet, die sich nicht schneiden. Sie haben ein Winkelmesser oder ein Geodreieck sowie einem Bleistift zur Verfügung. Wie können Sie auf dem Blatt Papier herausfinden, ob die Geraden sich schneiden (außerhalb des Papiers natürlich) und welches Maß der Winkel in diesem Fall besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 20.11.–22.11. besprochen werden:

- Zur Erinnerung: In der Vorlesung wurde behauptet, dass man einen rechten Winkel wie folgt konstruieren kann. Auf einer Geraden g durch zwei Punkte A und D sei in A ein weiterer Strahl gegeben, der mit dem Strahl in A durch D einen beliebigen Winkel bildet. Auf ihm sei ein Punkt B gegeben. Man trage diesen Winkel nach der anderen Seite von g in A ab. Auf dem neuen Strahl sei C der Punkt mit $AC \equiv AB$. Zeigen Sie nun: Die Gerade h durch B und C schneidet g in genau einem Punkt, O. Je ein Strahl in O auf h bzw. k bilden einen rechten Winkel. Hinweis: O kann verschieden bezüglich A liegen (Fallunterscheidung).

- Können Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade mit nur drei Schritten angeben (1 Schritt entspricht einem konstruierten Objekt, d.h. Gerade, Strahl, Kreis etc.)? Die Auswahl eines Punktes (beliebig, auf einer Geraden, aus der menge von zwei Schnittpunkten usw.) ist kein Konstruktionsschritt. Begründen Sie die Konstruktion.

- Können Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal der Senkrechten in einem Punkt auf der Geraden mit nur drei Schritten angeben (1 Schritt entspricht einem konstruierten Objekt, d.h. Gerade, Strahl, Kreis etc.)? Die Auswahl eines Punktes (beliebig, auf einer Geraden, aus der menge von zwei Schnittpunkten usw.) ist kein Konstruktionsschritt. Begründen Sie die Konstruktion.

- Es gelten alle Axiome inklusive des Parallelen-Axioms. Seien drei Geraden h, k, ℓ gegeben, so dass h parallel zu k und k parallel zu ℓ ist. Zeigen Sie, dass dann auch h parallel zu ℓ ist. Können Sie das ohne Verwendung des Parallelenaxioms ebenfalls begünden?

- Wiederholen Sie, wie wir die Dreiecksungleichung bewiesen haben.

- Es gelten alle Axiome inklusive des Parallelen-Axioms. Zeigen Sie den Stufen-, Wechsel- und Gegenwinkelsatz.

- Formulieren und beweisen Sie die Umkehrung des Basiswinkelsatzes.