Übungsblatt 7

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 11.12.2017

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome.

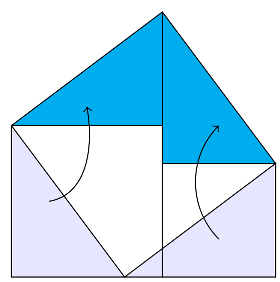
Aufgabe 1 (10 Punkte)
Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes des Pythagoras: Gilt in einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ die Gleichung

$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2,$$

so ist $\measuredangle(ACB)$ ein rechter Winkel.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Nutzen Sie die folgende Skizze, um einen Beweis des Satzes des Pythagoras zu entwickeln. Sie dürfen dabei Schulwissen zu Flächeninhalten benutzen. Führen Sie den Beweis exakt und ohne Lücken aus.



Aufgabe 3 (2 + 4 + 2 + 2 Punkte)
(a) Beweisen Sie folgende Aussage: Seinen a, b zwei positive reelle Zahlen und eine Strecke AB der Länge $|AB| = c$ gegeben, die $a + b > c, a + c > b$ sowie $b + c > a$ erfüllen. Dann gibt es genau zwei Punkte C, C' mit $a = |BC| = |BC'|$ und $b = |AC| = |AC'|$. C, C' liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden $G(A, B)$
Gehen Sie dabei wie folgt vor:
(i) Sei C ein solcher Punkt und $F \in G(A, B)$ der Fußpunkt des Lotes/der Höhe von C auf die Seitengerade. Welche möglichen Fälle für die Lage von F bezüglich A und B gibt es für beliebige a, b?
(ii) Bestimmen Sie die Längen $|AF|$ und $|CF|$ in allen diesen Fällen. Wie können Sie aus den Daten a, b, c ablesen, welcher der diskutierten Fälle unter (i) zutrifft?
(iii) Beweisen Sie nun die eingangs formulierte Aussage unter Ausnutzung der Axiome.
Achtung: Sie dürfen für diese Aufgabe keine Aussage analog zum Satz 32 verwenden, denn wir haben sie für den Beweis der Aussage benutzt, wann sich zwei Kreise schneiden.
(b) Benutzen Sie die Rechnung aus (a) (ii), um den Flächeninhalt des Dreiecks durch a, b und c auszudrücken. Zeigen Sie durch Rechnung, dass Ihr Ergebnis mit der Heronschen Formel

$$\mathcal{A}(\Delta(A, B, C)) = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)(a + b + c)}$$

für den Flächeninhalt übereinstimmt.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben sei ein Strahl h in O und ein Punkt I darauf mit $|OI| = 1$ (Zentimeter z.B.). Geben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal an, die für einen Punkt $X \in h$ mit $|OX| = x$ einen Punkt $Y \in h$ ergibt mit $|OY| = \sqrt{x}$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 4.12.–6.12. besprochen werden:

- Folgern Sie aus dem Satz des Pythagoras den Höhensatz und den Kathetensatz.
- Beweisen Sie den Höhensatz und den Kathetensatz **ohne** den Satz des Pythagoras zu benutzen und folgern Sie diesen aus dem Kathetensatz.
- Beweisen Sie folgende Aussage: Sind $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ zwei reelle Zahlen mit $\alpha + \beta < \pi$ und $c > 0$ eine positive reelle Zahl, so gibt es ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit $\alpha = \measuredangle(BAC), \beta = \measuredangle(ABC)$ und $c = |AB|$.
- Beweisen Sie folgende Aussage: Ist $\alpha \in (0, \pi)$ eine reelle Zahl und $a > b > 0$ zwei positive reelle Zahlen, so gibt es ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit $\alpha = \measuredangle(BAC), a = |BC|$ und $b = |AC|$.
- Gegeben sei ein Strahl h in O und ein Punkt I darauf mit $|OI| = 1$ (Zentimeter z.B.). Geben Sie eine Konstruktion an, die für zwei Punkte $X, Y \in h$ mit $|OX| = x$ und $|OY| = y$ einen Punkt $Z \in h$ ergibt mit $|OZ| = xy$. Benutzen Sie dabei den Strahlensatz, in dem Sie auf einen zweiten Strahl k in O, der mit h einen Winkel bildet, einen Punkt Y' mit $|OY'| = y$ abtragen. Die Konstruktion paralleler Geraden darf mit zwei Geodreiecken oder Ähnlichem ausgeführt werden. Begründen Sie Ihre Konstruktion.
- Wenden Sie die Konstruktion für die letzte Aufgabe auf xy und yx in derselben Figur an. Welche Ihnen von Blatt 6 bekannte Aussage ist dann gleichwertig zu $xy = yx$?