Übungsblatt 8

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 18.12.2017

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie die Irrationalität von $\sqrt{3}$, indem Sie das Abbruch-Kriterium des Euklidischen Algorithmus benutzen.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Berechnen Sie die Seitenlänge, die Länge der Diagonalen, sowie die (zwei) Längen der Strecken von Eckpunkt zum nächgelegenen Diagonalenschnittpunkt und zwischen zwei Diagonalenschnittpunkten des regelmäßigen Fünfecks, dessen Ecken auf dem Einheitskreis liegen. Die Ergebnisse sollen NICHT als Dezimalbrüche dargestellt werden sondern in der Form von möglicherweise geschachtelten Wurzelausdrücken. Für die Angabe des Ergebisses ohne Lösungsweg gibt es keine Punkte. Es wird zur Kontrolle der Ergebisse empfohlen, diese (z.B. im Internet) nachzuschauen.

Aufgabe 3 (4+ (2+2+2) Punkte)
Sei P ein Punkt außerhalb der Kreisscheibe eines Kreises $K = K(M, r)$ und A ein Punkt auf K, so dass die Gerade durch P und A eine Tangente an K ist.
(1) Bestimmen Sie $|PA|$ aus r und $|PM|$ und folgern Sie, dass es genau zwei solcher Punkte (wie A) gibt. Sei der zweite Punkt mit B bezeichnet. Zeigen Sie, dass $|\measuredangle(MPA)| = |\measuredangle(MPB)|$ ist.
(2) Sei C irgendein Punkt auf K, der im Inneren des Dreiecks $\Delta(P, A, B)$ liege.
(a) Zeigen Sie, dass die Tangente durch C an K die Strecken PA und PB schneidet. Die Schnittpunkte seien mit D und E bezeichnet.
(b) Zeigen Sie, dass der Umfang des Dreeicks $\Delta(D, P, E)$ nicht von der Wahl des Punktes C abhängt.
(c) Zeigen Sie, dass das Winkelmaß $|\measuredangle(DME)|$ ebenfalls unabhängig von dieser Wahl ist.

Aufgabe 4 (2+6 Punkte)
Sei ein Kreis $K = K(M, r)$ sowie $s > 0$ gegeben.
(a) Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, für die es eine Tangente an K durch diese gibt, so dass die Strecke von gegebenem Punkt und Berührpunkt dieser Tangente die Länge s hat.
(b) Sei weiterhin eine Gerade g gegeben. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal die Menge aller Punkte auf g, die Tangenten an K besitzen, so dass die Strecke vom Punkt zum Berührpunkt die Länge s besitzt. Hinweis: Die Antwort hängt von g, r und s ab. Dies muss in einer vollständigen Lösung diskutiert werden.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 11.12.–13.12. besprochen werden:

- Beweisen Sie den Satz des Thales, ohne analytische Argumente, d.h. das Modell der kartesischen Ebene zu benutzen.
- (a) Zeigen Sie die Irrationalität von $\sqrt{2}$, indem Sie das Abbruch-Kriterium des Euklidischen Algorithmus benutzen.
  (b) Erläutern Sie den Zusammenhang zu folgender Konstruktion: Gegeben sei ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$, dessen Schenkel die Länge 1 hat, d.h. $|AC| = |BC| = 1$ und $|AB| = \sqrt{2}$. Sei $D \in AB$, so dass $|AD| = 1$, sowie $E \in BC$, so dass $ED \perp AB$. Fertigen Sie eine Skizze an. Zeigen Sie, dass $|CE| = |BD|$ und schließen Sie daraus, dass man im zweiten Schritt des Euklidischen Algorithmus angewandt auf (AB, BC) ein Streckenpaar erhält, dass ebenfalls zu Basis und Schenkel eines (kleineren) gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks kongruent ist.
- Sei eine Gerade g sowie $s > 0$ gegeben. Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, die Mittelpunkt eines Kreises vom Radius s sind, der g in genau einem Punkt schneidet.
- Seien zwei parallele Geraden und ein Punkt gegeben, der zwischen ihnen liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden und P enthält.
- Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die $K(M, r)$ in genau einem gegebenen Punkt $P \in K$ schneiden und durch einen anderen Punkt Q gehen.
- Sei ein Kreis $K = K(M, r)$ und $s > 0$ gegeben. Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, die Mittelpunkt eines Kreises vom Radius s sind und K in genau einem Punkt schneiden.
- Seien zwei parallele Geraden und ein Kreis $K = K(M, r)$ gegeben, der komplett zwischen ihnen liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die die beiden Geraden und den Kreis in genau einem Punkt schneiden.
- Lösen Sie die vorige Aufgabe ohne die Bedingung, dass der Kreis K zwischen den Geraden liegt.