Übungsblatt 9

Geometrie WS 2017/18

Abgabe: 8.1.2018

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome. Für einige Teilaufgaben müssen Sie mit den Umkehrungen der Winkelsätze am Kreis oder dem Tangenten-Satz, dem Sekanten- bzw. dem Sehnensatz argumentieren.

Aufgabe 1 (2 + 5 Punkte)
(i) Beweisen Sie die folgende Umkehrung des Sehnen-Tangentenwinkelsatzes: Sei AB eine Sehne des Kreises K, g eine Gerade durch B, die A nicht enthält, sowie $E \in g \setminus \{B\}$ und $C \in K \setminus \{A; B\}$, so dass E und C auf verschiedenen Seiten von $G(A, B)$ liegen. Ist $\measuredangle(EBA) \cong \measuredangle(ACB)$ so ist g eine Tangente an K.
(ii) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Konstruktion einer Tangenten an einen Kreis K in einem Punkt P auf dem Kreis ("Euclidea 3.5"): (1) Wähle einen weiteren Punkt $Q \in K$, so dass PQ KEIN Durchmesser von K ist. (2) Bestimme den zweiten Schnittpunkt, R (neben P) des Kreises $L := K(Q, |PQ|)$ mit K. (3) Bestimme zweiten Schnittpunkt, S (neben R) des Kreises $K(P, |PR|)$ mit L. (4) Die Gerade $G(P, S)$ ist die Tangente. Bemerkung: In der Zählung von Euclidea sind dies drei elementare Schritte (Die Wahl eines Punktes zählt nicht mit.)

Aufgabe 2 (2+2+6 Punkte)
(i) Zeigen Sie: Seien A, B, C und A', B', C' jeweils drei verschiedene Punkte auf einem Kreis $K = K(M, r)$, so dass C und M auf derselben Seite von $G(A, B)$ und C' und M auf derselben Seite von $G(A', B')$ liegen. Dann ist $\measuredangle(ACB) \cong \measuredangle(A'C'B')$ genau dann, wenn $AB \cong A'B'$.
(ii) Sei $\Delta(A, B, C)$ ein beliebiges Dreieck. Dann schneiden sich die Winkelhalbierende in C und die Mittelsenkrechte von AB in einem Punkt auf dem Umkreis.
(iii) Sei ein Kreis K und drei verschiedenenen Punkten $H, S, W \in K$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal Punkte $A, B, C \in K$, so dass H der Schnittpunkt der Höhengeraden von C auf AB des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$, S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in C und W der Schnittpunkt der der Winkelhalbierenden in C jeweils mit dem Kreis ist. Dabei sei natürlich $H, S, W \neq C$. Ist Ihre Konstruktion immer durchführbar? Und wenn sie durchführbar ist, ergibt sie dann immer eine Lösung des Problems?

Aufgabe 3 (3 + 4 Punkte)
(i) Zeigen Sie die folgende Umkehrung des Sekantensatzes: Seien h und k zwei verschiedene und nicht entgegengesetzte Strahlen in einem Punkt O, $A, B \in h$ und $C, D \in k$. Ist $|OA||OB| = |OC||OD|$, so liegen A, B, C und D auf einem Kreis.
(ii) Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$, die sich in genau einem Punkt P schneiden. g sei die gemeinsame Tangente durch P und $Q \in g \setminus \{P\}$ ein Punkt darauf. Seien $A, B \in K$ die Schnittpunkte einer Sekanten von K durch Q und $C, D \in L$ die Schnittpunkte einer von der vorigen verschiedenen Sekanten von L durch Q. Zeigen Sie, dass A, B, C, D auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei $K = K(M, r)$ ein Kreis und A und B zwei Punkte außerhalb des Kreises, so dass $|MA| \neq |MB|$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Kreis durch A und B, der K in genau einem Punkt schneidet, d.h. berührt. Begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis: Nehmen Sie an, L sei ein solcher Kreis. Betrachten Sie die Gerade durch A und B und die gemeinsame Tangente der beiden Kreise. Aufgabe 3 ist hilfreich, sowie einer der Umkehrungen der Sätze am Kreis, als auch die Art und Weise, wie sich Kreise schneiden können.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 18.12.–20.12. besprochen werden:

- Eine Umkehrung des Satzes des Thales: Sei AB ein Durchmesser eines Kreises. Dann liegt ein Punkt C, für den $\measuredangle(ACB)$ ein rechter Winkel ist, auf dem Kreis.
- Noch eine Umkehrung des Satzes des Thales: Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einem Kreis. Sei $\measuredangle(ACB)$ ein rechter Winkel. Dann ist AB ein Durchmesser des Kreises.
- Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes: Seien A, B die zwei Schnittpunkte einer Sekante des Kreises K mit demselben. Sei O ein weiterer Punkt auf der Sekante außerhalb des Kreises. Sei C ein weiterer Punkt des Kreises, so dass $|OC|^2 = |OA||OB|$. Dann ist $G(O, C)$ eine Tangente an den Kreis.
- Noch eine Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes: Sei O ein Punkt auf der Tangente an einen Kreis im Punkt C, $O \neq C$. Seien A, B zwei Punkte auf einem Strahl in O. Liegt A auf K und ist $|OA||OB| = |OC|^2$, so liegt B ebenfalls auf K.
- Und noch eine: Seien zwei verschiedene und auch nicht entgegengesetzte Strahlen g und h gegeben in einem Punkt O gegeben. Seien $C \in g$ und $A, B \in h$ drei verschiedene Punkte, so dass $|OA||OB| = |OC|^2$. A, B, C sind nicht kollinear und der Kreis K, dert alle drei Punkte enthält, ist tangential an g.
- Seien drei Kreise K, L, M gegeben, die sich paarweise immer in genau zwei Punkten schneiden. Dann sind die drei Geraden durch diese Paare von Punkten entweder alle parallel zueinander oder schneiden sich alle in einem Punkt.