Klausur

Geometrie WS 2017/18

Aufgabe 1
In einer Ebene seien alle Axiome außer dem Parallelenaxiom vorausgesetzt.

a) Sei P ein Punkt, der nicht auf einer gegebenen Geraden g liege. Für einen Punkt $F \in g$, heißt die Strecke PF Lot von P auf g, falls PF senkrecht auf g steht. Zeigen Sie, dass der Fußpunkt F des Lotes der einzige Punkt ist der das Minimum

$$d(P, g) = \min\{d(P, Q) \mid Q \in g\}$$

realisiert. Die Existenz des Lotes sei dabei vorausgesetzt. (5 Punkte)

b) Es gelte zusätzlich das Parallelenaxiom. Beweisen Sie für $a > 0$ und reell sowie der Wahl einer Seite der Geraden g, dass die Menge aller Punkte R auf dieser Seite mit $d(R, g) = a$ eine Gerade ist. Sie dürfen hierfür keine kartesische Koordinaten verwenden. (5 Punkte)

Aufgabe 2
Im Folgenden wird das Poincaré-Modell der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ betrachtet.

a) Beschreiben Sie die Geraden in $\mathbb{H}$ und zeigen Sie, dass das Parallelenaxiom nicht gilt. (2 Punkte)

b) Beschreiben Sie alle Senkrechten zu $g := \mathrm{i}\mathbb{R} \cap \mathbb{H}$. Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

c) Sei $h := \{1+\mathrm{i}t \mid t \in (0, \infty)\}$ eine weitere Gerade in $\mathbb{H}$. Entscheiden Sie, ob es eine gemeinsame Senkrechte zu g und h gibt. Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

d) Sei $k := K(2, 1) \cap \mathbb{H}$. Finden Sie eine gemeinsame Senkrechte zu g und k und zeigen Sie, dass es keine weitere gibt. (2 Zusatzpunkte)

Aufgabe 3
Im Folgenden wird eine euklidische Ebene betrachtet.

a) Formulieren und beweisen Sie den Tangentensatz (manchmal auch Sekanten-Tangentensatz genannt). (5 Punkte)

b) Zeigen Sie die folgende Umkehrung des Sekantensatzes: Seien h und k zwei Strahlen in einem Punkt O, $A, B \in h$ und $C, D \in k$. Ist $|OA||OB| = |OC||OD|$, so liegen A, B, C und D auf einem Kreis. (5 Punkte)

c) Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$, die genau einen gemeinsamen Punkt P besitzen. g sei die gemeinsame Tangente durch P und $Q \in g \setminus \{P\}$ ein Punkt darauf. Seien $A, B \in K$ die Schnittpunkte einer Sekanten von K durch Q und $C, D \in L$ die Schnittpunkte einer von der vorigen verschiedenen Sekanten von L durch Q. Zeigen Sie, dass A, B, C, D auf einem Kreis liegen. (1 Punkt)

Aufgabe 4
Im Folgenden wird eine euklidische Ebene betrachtet. Sie dürfen annehmen, dass es die kartesische Ebene $\mathbb{R}^2$ ist.

a) Formulieren und beweisen Sie den Satz des Thales. Dafür dürfen Sie nicht allgemeinere Winkelsätze am Kreis verwenden. (3 Punkte)

b) Sei ein Kreis mit Mittelpunkt gegeben, sowie ein Punkt außerhalb des Kreises. Beschreiben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal aller Tangenten an den Kreis, die den gegebenen Punkt enthalten. Zeigen Sie die Korrektheit der Konstruktion. Formulieren Sie ggf. eine dafür nützliche Umkehrung des Satzes des Thales (ohne Beweis). Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen und begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Elementare Konstruktionen, wie z.B. die Konstruktion der Mittelsenkrechten müssen nicht näher beschrieben oder begründet werden. (7 Punkte)

Aufgabe 5
Bestimmen Sie das Verhältnis der Länge des Schenkels zur Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in der euklidischen Ebene, dessen Scheitelwinkel das Winkelmaß $\frac{\pi}{5}$ besitzt.
Hinweis: Dies ist das sogenannte "Goldende Dreieck". (5 Punkte)