Klausur

Geometrie WS 2017/18

Aufgabe 1
In einer Ebene seien alle Axiome der Geometrie bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt.
(1) Sei $\measuredangle(h,k)$ ein spitzer oder rechter Winkel. Zeigen Sie: Die Winkelhalbierende ist die Menge aller Punkte im Inneren des Winkels, die zu den Strahlen h und k denselben Abstand haben.
(5 Punkte)
(2) Erweitern Sie Ihren Beweis der Behauptung in (1) für den Fall, dass $\measuredangle(h,k)$ ein stumpfer Winkel ist. (1 Punkt)
(3) Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck. Zeigen Sie, dass sich die Winkelhalbierenden von je zwei Innenwinkeln in einem Punkt schneiden. (1 Punkt)
(4) Zeigen Sie, dass sich alle drei Winkelhalbierenden der Innenwinkel in genau einem Punkt schneiden. (2 Punkte)
(5) Zeigen Sie, dass es einen Kreis gibt, der alle drei Dreiecksseiten tangential berührt. (1 Punkt).

Aufgabe 2
In einer Ebene seien alle Axiome der Geometrie bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt.
(1) Was ist eine Isometrie? Welche Arten von Isometrie liegen vor, falls es
(a) genau einen,
(b) wenigstens zwei verschiedene
Fixpunkte gibt? Die Antworten müssen hier nicht begründet werden. (3 Punkte)
(2) Definieren Sie die Spiegelung an einem Punkt und zeigen Sie, dass dies eine Isometrie ist.
(4 Punkte)
(3) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung von zwei Spiegelungen an verschiedenen Punkten keinen Fixpunkt besitzt. (2 Punkte)

(4) **Zusatz:** Seien zwei verschiedene Geraden gegeben. Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Verknüpfung der Spiegelungen an diesen beiden Geraden. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Die Zusatzpunkte gibt es wirklich nur, wenn Sie das Parallelenaxiom nicht benutzen. Der Zusammenhang zwischen Spiegelungen und Drehungen ist in diesem allgemeineren Kontext eine Folgerung und muss und soll für diese Aufgabe nicht benutzt werden. (2 Zusatzpunkte)

Aufgabe 3
In einer Ebene seien alle Axiome der Geometrie vorausgesetzt.
Wenn Sie in dieser Aufgabe (2) aus (1) folgern, so dürfen Sie nicht (2) für (1) benutzen und umgekehrt. Empfehlung: Beweisen Sie (1) ohne den Satz des Pythagoras zu benutzen und folgern Sie diesen dann daraus. Wenn Sie einen anderen Beweis des Pythagoras kennen, dürfen Sie auch diesen erläutern und dann den Kathetensatz daraus folgern.
(1) Formulieren Sie den Kathetensatz und beweisen Sie ihn. (4 Punkte)
(2) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras. (4 Punkte)
(3) Gegeben sei eine Strecke AB. Beschreiben Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für eine Strecke CD, die $\sqrt{7}$ mal länger als AB ist. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.
(3 Punkte)

Aufgabe 4
In einer Ebene seien alle Axiome der Geometrie vorausgesetzt.
Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben und M, N, P die Mittelpunkte der Seiten AB, BC bzw. AC. Weiterhin seien F der Fußpunkt der Höhe auf AB. Zeigen Sie dass der Umkreis des Dreiecks $\Delta(M, N, P)$ auch den Punkt F enthält. (5 Punkte)

Hinweis: Fertigen Sie eine brauchbare Skizze mithilfe Ihrer Zeichengeräte an. Betrachten Sie das Viereck $MNPF$ genauer und stellen Sie eine Hypothese darüber auf. Erläutern Sie, wie daraus die Behauptung folgt. Beweisen Sie Ihre Hypothese.

Aufgabe 5
Leiten Sie die Werte der Winkelfunktionen $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ her. (5 Punkte)