Übungsblatt 1

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 31.10.2018

Aufgabe 1 (4+2+3 Punkte)
(a) Wieviele verschiedene Inzidenzgeometrien gibt es auf der vierelementigen Menge $\mathcal{E} := \{A; B; C; D\}$?
Hinweis: Es kann für Sie übersichtlicher sein, sich die Situation auf dem Papier zu veranschaulichen und die Geraden dabei als gezeichnete gerade Linien darzustellen, die die jeweiligen Punkte enthalten, obwohl diese Linien anschaulich ja nicht nur genau aus diesen Punkten bestehen (siehe Beispiel mit $\mathcal{E} := \{A; B; C\}$ aus der Vorlesung).
(b) Bestimmen Sie für die Inzidenzgeometrien aus (a) alle Paare paralleler Geraden.
(c) Zeigen Sie die folgende Aussage für Inzidenzgeometrien aus der Vorlesung: Für jeden Punkt gibt es eine Gerade, die diesen Punkt nicht enhält.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Wenn man ein Blatt Papier einmal faltet und wieder aufklappt, zwei Punkte auf der Faltlinie markiert und diese mit (einem guten) Lineal und (spitzen) Bleistift verbindet, so wird die gezeichnete Linie auf der Faltlinie verlaufen. Was bedeutet das für die Faltlinie? Begründen Sie, warum das so sein sollte?
Hinweis: Das Papier ist ein (physikalisches) Modell der euklidischen Geometrie. Wir stellen uns vor, es wäre wirklich nur zweidimensional (ohne Dicke) und außerdem transparent. Die Geraden sind dann durch die Linien modellliert, die wir mit Lineal und Bleistift zeichnen. Wir können sie von beiden Seiten aus sehen. Vergleichen Sie die beiden Ansichten. Was passiert mit der Faltline, wenn man nach dem Falten, den unteren Teil des Blattes aufklappt? Was passiert mit den Punkten außerhalb der Faltlinie? Die Fragen des Hinweises müssen nicht beantwortet werden, sind aber vielleicht hilfreich für die Lösung.

Aufgabe 3 (4+3 Punkte)
Wir betrachten im Folgenden die Ebene, die durch die Menge $\mathbb{R}^2$ gegeben sei. Die Parabeln der Form $\{(x, (x-a)^2 + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ mit beliebigen reellen Zahlen a und b sowie die zur y–Achse parallelen Geraden, d.h. die Mengen $\{(c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$, seien die Geraden.
(a) Überprüfen Sie die Grundeigenschaften der Inzidenz für die Geraden in dieser Ebene.
(b) Bestimmen Sie alle Parallelen zu einer beliebigen Geraden und einem Punkt außerhalb dieser.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Abgebrochenes Lineal. Markieren Sie auf einem Blatt Papier zwei Punkte, die ungefähr 9cm entfernt sind. Konstruieren Sie die Strecke zwischen den beiden Punkten, mithilfe eines Zirkels und eines Linealstückchens, dass nur 3cm lang ist. (Sie brauchen Ihr Lineal dafür nicht zerbrechen :). Begründen Sie die Korrektheit.
Hinweis: Diese Aufgabe beruht auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule und darf mit diesen gelöst und begründet werden.

Kommentar: Aufgabe 1 und 3 dienen der Gewöhnung an formales Argumentieren auf der Grundlage von Axiomen, Definitionen und vorangegangenen Sätzen. In Aufgabe 2 sollen Sie zum Inzidenzaxiom Eigenschaften hinzufügen, die sich aus (physikalischen) Eigenschaften von Papier ergeben. Ignorieren Sie vielleicht erstmal den Hinweis - vielleicht finden Sie ja ganz andere Erklärungen.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 22.-25.10. besprochen werden:

- Wiederholen Sie den Begriff der Inzidenzgeometrie aus der Vorlesung. Welche Beispiele kennen Sie bereits?
- Was bedeutet der Begriff Parallelität in diesem Kontext?
- Krummes Lineal? Markieren Sie zwei Punkte auf einem Blatt Papier. Zeichnen Sie mithilfe Ihres Lineals eine Linie durch diese zwei Punkte und markieren oder merken Sie sich, wo diese Punkte am Lineal anliegen. Klappen Sie das Lineal um. Legen Sie es an die gezeichnete Linie an, wobei die Punkte wieder genauso anliegen sollen (das geht z.B. ganz gut mit einem transparenten Lineal). Wie kann man nun entscheiden, ob die Linie Teil einer Geraden bzw. das Lineal krumm oder gerade ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Sei eine Inzidenzgeometrie $\mathcal{G}$ auf einer Menge $\mathcal{E}$ gegeben, die das Parallelelenaxiom erfülle: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt, der nicht auf ihr liegt, gibt es höchstens(!) eine Gerade durch diesen Punkt, die die Gerade g nicht schneidet, d.h. **parallel** dazu ist. Zeigen Sie: ist g parallel zu h und h parallel zu k, so ist g auch parallel zu k oder gleich. Gilt dies auch ohne das Parallelenaxiom? Probieren Sie mit Inzidenzgeometrien auf einer 5–elementigen Menge.
- Bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge der Geraden. Zeigen Sie, dass durch folgende Definition auf $\mathcal{G}$ eine Inzidenzgeometrie gegeben ist: jeder Punkt $P \in E$ bestimme eine "Gerade", die aus allen Elementen von $\mathcal{G}$ besteht, die P enthalten. Weiterhin bestimme jedes Element aus $\mathcal{G}$ eine "Gerade", die aus dem Element selbst und allen Elementen von $\mathcal{G}$ besteht, die parallel dazu sind, es sei denn, dass diese Gerade gar keine Parallelen besitzt.
- Kann es in dieser Inzidenzgeometrie Parallelen geben? Studieren Sie diese Frage zunächst für $\mathbb{R}^2$ mit den affinen geraden (siehe Vorlesung). Betrachten Sie dann die aus fünf Punkten bestehende Ebene $\mathcal{E} := \{A; B; C; D; E\}$ mit Inzidenzgeometrie
  $\mathcal{G} := \{\{A; B\}; \{B; C\}; \{C; D\}; \{D; A\}; \{A; E; C\}; \{B; E; D\}\}$. Finden Sie in der oben beschriebenen Inzidenzgeometrie auf der Menge $\mathcal{G}$ ein paralleles Geradenpaar.
- Überprüfen Sie die Grundeigenschaften der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene, wenn die Ebene $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist und die kartesischen Kreise und Geraden, die durch die 0 gehen (der Durchschnitt dieser mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) die Menge der Geraden bilden. Sie dürfen dabei natürlich alles Wissen um Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, benutzen. Bestimmen Sie alle Parallelen zu einer beliebigen Geraden und einem Punkt außerhalb dieser.
- **Eingerosteter Zirkel.** Halbieren Sie eine Strecke mithilfe eines Lineals (ohne Skalierung) und eines eingerosteten Zirkels. Die Strecke ist dabei mehr als doppelt so groß wie die Spannweite des Zirkels. Begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion.
  Hinweis: Diese Aufgabe beruht auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule und darf mit diesen gelöst und begründet werden.

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung und beruhen auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule. Sie werden nicht unbedingt in den Übungen besprochen.

- Wiederholen Sie die Ihnen aus der Schule bekannten Kongruenzsätze für Dreiecke. Diskutieren Sie anhand von Beispielen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal von Dreiecken mit gegebenen drei Größen aus der Menge der Innenwinkel und Seitenlängen, insbesondere Konstruierbarkeit/Existenz und Eindeutigkeit.
- Wiederholen Sie die folgenden Begriffe der euklidischen Geometrie und ihre Eigenschaften: Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Parallelität, Stufen- und Wechselwinkel an parallelen Geraden, Außenwinkelsatz und Innenwinkelsatz des Dreiecks.
- Wodurch ist ein rechter Winkel definiert? Erinnern Sie sich an die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal der Mittelsenkrechten einer Strecke, des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade, der Senkrechten zu einer Geraden durch einen Punkt auf dieser, der Winkelhalbierenden. Wie begründen Sie die Korrektheit dieser Konstruktionen?