Übungsblatt 10

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 16.1.2019

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome.

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)
(a) Seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf die Seiten BC, AC bzw. AB eines spitzwinkligen Dreiecks $\Delta(A, B, C)$. Beweisen Sie, dass die Höhengeraden $G(A, D), G(B, E)$ und $G(C, F)$ die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(D, E, F)$ sind. Hinweis: Der in der Vorlesung diskutierte 9-Punkte-Kreis ist hier sehr hilfreich.
(b) Wodurch werden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(D, E, F)$ beschrieben, wenn das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ stumpfwinklig ist? Sie dürfen den Eckpunkt mit stumpfem Innenwinkel dabei festlegen und die Behauptung aus (a) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben. Hinweis: Jetzt hilft die Idee des Beweises der Behauptung aus der Vorlesung, dass die Mittelpunkte der Höhenabschnitte auf dem Umkreis der Seitenmittelpunkte liegen.

Aufgabe 2 (4 + 3 Punkte)
(i) Zeigen Sie die folgende Umkehrung des Sekantensatzes: Seien h und k zwei verschiedene und nicht entgegengesetzte Strahlen in einem Punkt O, $A, B \in h$ und $C, D \in k$. Ist $|OA||OB| = |OC||OD|$, so liegen A, B, C und D auf einem Kreis.
(ii) Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$, die sich in genau einem Punkt P schneiden. g sei die gemeinsame Tangente durch P und $Q \in g \setminus \{P\}$ ein Punkt darauf. Seien $A, B \in K$ die Schnittpunkte einer Sekanten von K durch Q und $C, D \in L$ die Schnittpunkte einer von der vorigen verschiedenen Sekanten von L durch Q. Zeigen Sie, dass A, B, C, D auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 3 (3 + 6 Punkte)
(i) Seien zwei verschiedene und auch nicht entgegengesetzte Strahlen g und h in einem Punkt O gegeben. Seien $C \in g$ und $A, B \in h$ drei verschiedene Punkte, so dass $|OA||OB| = |OC|^2$. Zeigen Sie, dass A, B, C nicht kollinear sind und der Kreis K, der alle drei Punkte enthält, tangential an g ist.
(ii) Sei $K = K(M, r)$ ein Kreis und A und B zwei Punkte außerhalb des Kreises, so dass $|MA| \neq |MB|$. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise durch A und B, der mit K genau einen Punkt gemeinsam hat. Begründen Sie die Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Lösung.
Hinweis: Nehmen Sie an, L sei ein solcher Kreis. Betrachten Sie die Gerade durch A und B und die gemeinsame Tangente der beiden Kreise. Aufgabe 2 und (i) sind hilfreich. Sie dürfen gegebenenfalls annehmen, dass sich von Ihnen konstruierte Geraden, die nicht parallel sind, in einem Punkt auf Ihrem Arbeitsblatt schneiden.
HInweis 2: Sei P der Schnittpunkt von $G(A, B)$ und der Tangenten (P und die Tangente sind nicht bekannt). Eine Sekante durch P von K schneide diesen in C und D. Was gilt dann für A, B, C und D? Drehen Sie nun den Spieß um: Seien $C, D \in K$, so dass für A, B, C und D... Sei P der Schnittpunkt von $G(A, B)$ und $G(C, D)$. Betrachten Sie die Tangente durch P an K.

Aufgabe 4 (3 + 1 Punkte)
(a) Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit den Seitenlängen a, b, c gegeben (mit der üblichen Zuordnung). Sei F der Flächeninhalt. Bestimmen Sie die Radien r_a, r_b und r_c der Ankreise an die Seiten BC, AC bzw. AB aus diesen Größen.
(b) Sei r der Inkreisradius. Beweisen Sie die Formel

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 7.1.–10.1. besprochen werden:

a) **Neun-Punkte-Kreis:** (a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der M_a, M_b der Seiten BC und AC eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ sowie die Mittelpunkte E_a, E_b der Höhenabschnitte AP_H sowie BP_H ein Rechteck bilden.
(b) Analoges gilt für die anderen zwei Paare von Seiten. Folgern Sie daraus, dass M_a, M_b, M_c zusammen mit E_a, E_b, E_c auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Schnittpunkt der Strecken M_aE_a, M_bE_b und M_cE_c sein muss.
(c) Zeigen Sie schließlich, dass die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c ebenfalls auf diesem Kreis liegen müssen.
Hinweis: Hier gibt es viele Mittelpunkte von Strecken und parallele oder senkrechte Geraden. Der Satz des Thales ist ebenfalls hilfreich.

b) Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes: Seien A, B die zwei Schnittpunkte einer Sekante des Kreises K mit demselben. Sei O ein weiterer Punkt auf der Sekante außerhalb des Kreises. Sei C ein weiterer Punkt des Kreises, so dass $|OC|^2 = |OA||OB|$. Zeigen Sie, dass dann ist $G(O, C)$ eine Tangente an den Kreis ist.

c) Noch eine Umkehrung des Sekanten-Tangentensatzes: Sei O ein Punkt auf der Tangente an einen Kreis im Punkt C, $O \neq C$. Seien A, B zwei Punkte auf einem Strahl in O. Beweisen Sie: Liegt A auf K und ist $|OA||OB| = |OC|^2$, so liegt B ebenfalls auf K.

d) (i) Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck, $D \in AB$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite AB. Zeigen Sie:
$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|CB|}.$$
Anmerkung: Sie können trigonometrische Formeln verwenden. Es gibt auch einen sehr schönen und für (ii) nützlichen geometrischen Beweis.
(ii) Gegeben seien $a, b, w_\gamma > 0$ z.B. durch konkrete Strecken mit diesen Längen auf Ihrem Arbeitsblatt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$, dessen Winkelhalbierende in C die gegenüberliegende Seite AB in D schneide, so dass $|AC| = b, |BC| = a$ sowie $|CD| = w_\gamma$. Begründen Sie die Korrektheit, Vollständigkeit und Durchführbarkeit Ihrer Konstruktion.

e) Es seien die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks gegeben. Der Flächeninhalt sei F. Bestimmen Sie aus diesen Größen den Inkreisradius r, sowie den Umkreisradius R des Dreiecks. Leiten Sie eine Formel für das Produkt rR her.