Übungsblatt 10

Geometrie WS 2018/19

Lösungsansatz für Aufgabe 1

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)
(a) Seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf die Seiten BC, AC bzw. AB eines spitzwinkligen Dreiecks $\Delta(A, B, C)$. Beweisen Sie, dass die Höhengeraden $G(A, D), G(B, E)$ und $G(C, F)$ die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(D, E, F)$ sind. Hinweis: Der in der Vorlesung diskutierte 9-Punkte-Kreis ist hier sehr hilfreich.
(b) Wodurch werden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks $\Delta(D, E, F)$ beschrieben, wenn das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ stumpfwinklig ist? Sie dürfen den Eckpunkt mit stumpfem Innenwinkel dabei festlegen und die Behauptung aus (a) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben. Hinweis: Jetzt hilft die Idee des Beweises der Behauptung aus der Vorlesung, dass die Mittelpunkte der Höhenabschnitte auf dem Umkreis der Seitenmittelpunkte liegen.

Lösungsansatz:Zu (a) Sei (wie in der Vorlesung) mit P_h der Höhenschnittpunkt bezeichnet, mit $H_a = D$, $H_b = E$ und $H_c = F$ die Fußpunkte der Höhen auf BC, AC bzw. AB und mit E_c die Mitte der Strecke CP_h. H_a, H_b, H_c und E_c liegen auf einem Kreis, dem Neunpunktekreis. Die Behauptung ist identisch zu

$$\measuredangle(H_a H_c E_c) \cong \measuredangle(H_b H_c E_c).$$

Das sind Umfangswinkel des Neunpunktekreises über den Sehnen $H_a E_c$ und $H_b E_c$. Die Winkel sind beide spitz, da sie Teil eines rechten Winkels in H_c sind (folgt aus $H_a \in BC$ und $H_b \in AC$ für ein spitzwinkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$). Daher leigen der Mittelpunkt des Neunpunktekreises und H_c auf derselben Seite der beider Sehnen und die zu zeigende Behauptung ist äquivalent zu

$$H_a E_c \cong H_b E_c.$$

(Dieser Sachverhalt wurde in der Vorlesung (unbewiesen) als Folgerung präsentiert. Ein Beweis geht wie folgt: Sei M der Mittelpunkt des Neunpunktekreises. Dann folgt aus $H_a E_c \cong H_b E_c$ mit [SSS], dass $\Delta(H_a, E_c, M) \cong \Delta(H_b, E_c, M)$ und somit die Zentriwinkel kongruent sind, damit aber auch die Umfangswinkel).

Die Dreiecke $\Delta(C, H_a, P_h)$ und $\Delta(C, H_b, P_h)$ sind rechtwinklig in H_a bzw. H_b. E_c ist der Mittelpunkt der Hypothenuse. Somit folgt aus der Umkehrung des Satzes des Thales, dass $H_a E_c \cong CE_c \cong H_b E_c$ ist und die Behauptung ist gezeigt.

Zu (b) (Experimentieren mit Geogebra sollte hier für eine Hypothese helfen) Sei der stumpfe Winkel in B gegeben. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels des Dreiecks $\Delta(H_a, H_b, H_c)$ bei H_b ist wieder die Höhe auf AC mit derselben Begründung während die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei H_a durch die Seitengerade $G(A, B)$ und der bei H_c durch die Seitengerade $G(A, B)$ gegeben sind. Das kann man z.B. einsehen, indem man das spitzwinklige Dreieck $\Delta(P_h, A, C)$ betrachten und bemerkt, dass die Höhengerade auf AP_h mit $G(B, C)$ und die auf CP_h mit $G(A, B)$ übereinstimmt. Damit folgt die Behauptung direkt aus der in (a).
Bemerkung: Die Höhen auf AB bzw. BC teilen die Außenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks.