Übungsblatt 10

Geometrie WS 2018/19

Lösungsansätze Rückseite

Aufgabe zum Neun-Punkte-Kreis: (a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte M_a, M_b der Seiten BC und AC eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ sowie die Mittelpunkte E_a, E_b der Höhenabschnitte AP_H sowie BP_H ein Rechteck bilden.
(b) Analoges gilt für die anderen zwei Paare von Seiten. Folgern Sie daraus, dass M_a, M_b, M_c zusammen mit E_a, E_b, E_c auf einem Kreis liegen, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Schnittpunkt der Strecken M_aE_a, M_bE_b und M_cE_c sein muss.
(c) Zeigen Sie schließlich, dass die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c ebenfalls auf diesem Kreis liegen müssen.
Hinweis: Hier gibt es viele Mittelpunkte von Strecken und parallele oder senkrechte Geraden. Der Satz des Thales ist ebenfalls hilfreich.

Lösungsansatz: Zu (a) Umkehrung des Strahlensatzes zeigt $M_aM_b \parallel AB \parallel E_aE_b$ und $E_aM_b \parallel CH_c \parallel E_bM_a$. Die Höhe $CH_c \perp AB$ und damit stehen auch die anliegenden Seiten des Rechtecks senkrecht aufeinander.
Zu (b) Damit liegen die vier Punkte auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen, also der Mittelpunkt von M_aE_a und von M_bE_b ist. Diese sind auch gleichlang. Wiederholt man dass für b und c anstelle von a und b erhält man die Behauptung.
Zu (c) $\measuredangle(M_bH_bE_b)$ ist ein rechter Winkel (BH_b) ist eine Höhe) und $\measuredangle(M_bE_aE_b)$ ebenfalls (in (a) gezeigt). Umkehrung des Thales ergibt, dass H_b auf dem Umkreis des Rechtecks liegt (dessen Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Diagonalen). Analog liegen auch H_a und H_c darauf.

Aufgabe: Es seien die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks gegeben. Der Flächeninhalt sei F. Bestimmen Sie aus diesen Größen den Inkreisradius r, sowie den Umkreisradius R des Dreiecks. Leiten Sie eine Formel für das Produkt rR her.

Lösungsansatz: zu r: Man zerlege das Dreieck in drei Teildreiecke, deren einer Eckpunkt der Inkreismittelpunkt I ist. Mit dem Zerlegungssatz aus der Vorlesung erhält man, dass sich die Flächeninhalte F_a, F_b, F_c zum Gesamtinhalt F aufsummieren. Die Höhen dieser Dreiecke von I ist gleich r. Also gilt

$$F = \frac{1}{2}(ar + br + cr)$$

und damit

$$r = \frac{2F}{a + b + c}.$$

Zu R: Aus dem Sinussatz wissen wir, dass

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Andererseits gilt

$$F = \frac{1}{2}\sin\alpha bc.$$

Also insgesamt

$$R = \frac{abc}{4F}.$$

Zu rR: Insgesamt erhalten wir also

$$rR = \frac{abc}{2(a + b + c)}.$$