Übungsblatt 11

Geometrie WS 2018/19

Lösungshinweise zur Aufgabe 3

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Gegeben seien drei Strecken mit paarweise verschiedenen Längen h, w bzw. s. Konstruieren Sie mithilfe von Zirkel und Lineal ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ dessen Höhe von C auf AB die Länge h, dessen Seitenhalbierende von C die Länge s und für das die Strecke CD die Länge w besitzt, wobei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Innenwinkels in C mit AB ist. Leiten Sie die Konstruktion her, beschreiben Sie diese und erläutern Sie Durchführbarkeit und Korrektheit.

Lösung: Herleitung: Sei F der Fußpunkt der Höhe von C auf AB, M der Mittelpunkt der Seite AB, D wie in der Aufgabe beschrieben. Zunächst bemerken wir, dass D immer zwischen F und M liegt. Es kann nicht $|AC| = |BC|$ gelten, da sonst $h = w = s$ wäre. Sei S der Schnittpunkt von Winkelhalbierender und Mittelsenkrechter von AB. Dieser liegt auf dem Umkreis (siehe Vorlesung), also außerhalb des Dreiecks. Nun ist $|\measuredangle(CDM)| > |\measuredangle(DMS)| = \pi/2$ nach dem Außenwinkelsatz. Läge F auf dem Strahl in D durch M, so hätte das Dreieck $\Delta(F, D, C)$ zwei nicht spitze Winkel, was nicht möglich ist. Also liegt F auf dem Gegenstrah und folglich D zwischen F und M. Mit denselben Winkeln ergibt sich $h < w < s$, da einem rechten bzw. stumpfen Winkel die größte Seite in einem Dreieck gegenüberliegt. In allen anderen Fällen gibt es folglich keine Lösung. S liegt nun insbesondere auf der Senkrechten m in M zu FM sowie auf der Geraden $G(C, D)$. Der Mittelpunkt des Umkreises befindet sich auf der Mittelsenkrechten von CS und m. A und B liegen auf diesem und der Geraden $G(F, M)$.

Konstruktion: 1. Konstruiere das rechtwinklige Dreieck $\Delta(C, F, M)$ mit rechtem Winkel in F und $|CF| = h$ sowie $|CM| = s$: Konstruiere Mittelpunkt der gegebenen Strecke der Länge s, dann den Kreis um diesen Mittelpunkt durch die Endpunkte der Strecke. Einer der Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt in einem dieser Endpunkte und Radius h ergibt mit der ersten Strecke das gesuchte Dreieck.
2. Konstruiere die Senkrechte m zu FM in M.
3. Bestimme D als Schnittpunkt des Kreises in C vom Radius w mit FM.
4. Bestimme Schnittpunkt S von $G(C, D)$ und m.
5. Bestimme Mittelpunkt von CS.
6. Bestimme A und B als die Schnittpunkte des Kreises durch diesen Mittelpunkt durch C und der Geraden $G(F, M)$.

Durchführbarkeit/Anzahl der Lösungen: In 1. werden Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kreis ermittelt, derer es zwei gibt, da der Mittelpunkt des zweiten Kreises auf dem ersten liegt und der Radius kleiner als der Durchmesser ist. Diese ergeben allerdings kongruente Dreiecke. Der Schnittpunkt in 3. existiert und ist eindeutig wegen $h < w < s$. In 6. gibt es zwei Möglichkeiten, A und B zu benennen. Die zugehörigen Dreiecke sind kongruent, wenn auch unter Vertauschung der Bezeichnung der Eckpunkte.

Korrektheit: $CF \perp AB$ und $|CF| = h$. Da der Mittelpunkt des Kreises in 6. auf m liegt, liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB. Da $M \in m$ ist M der Mittelpunkt von AB und somit CM die Seitenhalbierende. Nach Konstruktion ist $|CM| = s$. Schließlich folgt daraus auch, dass CS die Winkelhalbierende des Innenwinkels in C ist. Da CS durch D verläuft, folgt mit $|CD| = w$ (nach Konstruktion) die Korrektheit.