Übungsblatt 11

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschläge für die Rückseite

Aufgabe: Leiten Sie die exakten Werte von $\sin(\pi/10)$ und $\cos(\pi/10)$ her. Dabei ist nicht die angenäherte Dezimaldartstellung gesucht sondern ein algebraischer Ausdruck der Form $a + b\sqrt{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und Iterationen davon, d.h. a, b, c sind von der vorigen Form usw. Begründen Sie jeden Schritt bei Ihrer Herleitung. Hinweis: Das "Goldende Dreieck" ist hier nützlich.

Lösung: Das Goldenen Dreieck ist gleichschenklig und der Scheitelwinkel hat das Maß $\frac{\pi}{5}$. Damit ist der Sinus nach Definiton gleich dem Quotienten aus halber Basislänge und Länge des Schenkels, also

$$\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Aus dem trigonometrischen Pythagoras folgt

$$\cos(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2} = \sqrt{\frac{16-5-1+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Aufgabe: Geben Sie Formeln für $\sin(2x), \sin(3x)$, $\cos(2x), \cos(3x)$ in Termen von $\sin x$ und $\cos x$ an.

Lösung: Mithilfe der Additionstheoreme berechnet man

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)\\
\cos(2x) &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1\\
\sin(3x) &= \sin(x)\cos(2x) + \cos(x)\sin(2x) = \sin(x)(2\cos^2(x)-1) + \cos(x)2\sin(x)\cos(x))\\
&= 2\sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)\\
\cos(3x) &= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = \cos(x)(2\cos^2(x)-1) - 2\sin(x)\sin(x)\cos(x)\\
&= 2\cos^3(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) - \cos(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe: Bestimmen Sie die exakten Werte von $\sin(\pi/20)$ und $\cos(\pi/20)$.

Lösung: Zunächs ergibt die Formel für $\cos(2x)$:

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{\cos(2x)+1}{2}}.$$

Daraus folgt

$$\cos(\frac{\pi}{20}) = \sqrt{\frac{\cos(\frac{\pi}{10})+1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+1)} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

Aus dem trigonometrischen Pythagoras folgt wiederum

$$\sin(\frac{\pi}{20}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{20})} = \sqrt{1 - \frac{8+2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{4}$$

Aufgabe: Gegeben seien zwei Strecken mit Längen h und s sowie ein Winkel der Größe γ. Konstruieren Sie mithilfe von Zirkel und Lineal ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ dessen Höhe von C auf AB die Länge h, dessen Seitenhalbierende von C die Länge s und dessen Innenwinkel in C das Maß γ hat. Leiten Sie die Konstruktion her, beschreiben Sie diese und erläutern Sie Durchführbarkeit und Korrektheit. Tipp: Verdoppeln Sie die Seitenhalbierende über den Mittelpunkt der Seite hinaus und verbinden Sie den neuen Punkt mit A und B. Was wissen wir über dieses Parallelogramm?

Lösung: Herleitung: Sei F der fußpunkt der Höhe von C auf AB, M der Mittelpunkt der Seite AB. Das Dreieck $\Delta(C, F, M)$ hat einen rechten Winkel in F. Sei in $C' \in G(C, M)$ mit $M \in CC'$ $C' \neq C$ und $|MC| = |MC'|$ ("Verdopplung des Dreiecks").
Das Viereck $AC'BC$ ist ein Parallelogramm, denn: $\Delta(A, M, C) \cong \Delta(B.M.C')$ wegen [SWS] (Bedingungen sind zu prüfen!). Daraus folgt $AC \parallel BC'$. Analog folgt $AC' \parallel BC$.
Damit ist $|\measuredangle(CAC')| = \pi - \gamma$ (Wechselwinkel an Parallelen).
Wegen des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes ist der halbe Zentriwinkel des Umkreises von $\Delta(A, C, C')$ über CC' gleich $\pi - \gamma$, wobei A und der Mittelpunkt P des Umkreises auf derselben Seite von CC' liegen, falls $\pi - \gamma < \pi/2$ also γ stumpf, auf verschiedenen Seiten, falls γ spitz und $P \in CC'$, falls γ ein rechter Winkel ist. Jede solche Dreieck wird demnach mit der folgenden Konstruktion erhalten.

Konstruktion: 1. Konstruiere das rechtwinklige Dreieck $\Delta(C, F, M)$ mit rechtem Winkel in F und $|CF| = h$ sowie $|CM| = s$: Konstruiere Mittelpunkt der gegebenen Strecke der Länge s, dann den Kreis um diesen Mittelpunkt durch die Endpunkte der Strecke. Einer der Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt in einem dieser Endpunkte und Radius h ergibt mit der ersten Strecke das gesuchte Dreieck.
2. Konstruiere die Senkrechte m zu CM in M.
3. Trage den Winkel $|\frac{\pi}{2} - \gamma|$ in C an den Strahl in C durch M auf auf beliebige Seite von CM ab. Schnittpunkt mit m sei mit P bezeichnet.
4. Zeichne Kreis um P, der C enthält. Dieser besitzt zwei Schnittpunkte mit $G(F, M)$. Falls γ spitz wähle den, der auf einer anderen SEite von CM liegt als P, falls γ stumpf, den anderen. Ist γ rechtwinklig, so ist es egal, wähle irgendeinen. Bezeichne ihn mit A.
5. Trage MA auf $G(F, M)$ auf der anderen Seite von M ab (in der A nicht liegt).
Das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ ist die Lösung.

Durchführbarkeit/Anzahl der Lösungen: Für $h > s$ gibt es keine Lösungen, da es kein solches rechtwinkliges Dreieck gibt (größtem Winkel liegt größte Seite gegenüber). Ist $h = s$ vereinfacht sich die Konstruktion: Das Dreieck ist gleichschenklig: man trage auf jeder Seite der Strecke $CM = CF$ den Winkel $\gamma/2$ ab und ermittle die beiden Schnittpunkte A, B der Strahlen mit der Senkrechten zu CM in M. Für $h < s$ ist jeder Schritt so wie angegeben ausführbar. in Schritt 3. gibt es zwei Möglichkeiten der Winkelabtragung. Eine Inspektion des in der Herleitung betrachteten Parallelogramms zeigt, dass ich dann im Schritt 4. einmal den Punkt A, das andere mal den Punkt B erhalte und im folgenden Schritt 5. dann den Punkt B bzw. den Punkt A. Insgesamt erhalte ich dadurch zwei kongruente (mit Vertauschung von A und B).

Korrektheit: Sei C' der zweite Schnittpunkt der Geraden $G(C, M)$ mit dem Kreis in P. Dann ist nach dem Umfangs-Zentriwinkelsatz $\measuredangle(CAC') = \pi - \gamma$. $AC'BC$ ist wie bei der Herleitung ein Parallelogramm. Also ist $|\measuredangle(ACB)| = \gamma$. Nach Konstruktion ist CF die Höhe der Länge h und M der Mittelpunkt und somit CM die Seitenhalbierende der Länge s.