Übungsblatt 12

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 30.1.2019

Es seien alle Axiome außer dem Parallelenaxiom vorausgesetzt.

Aufgabe 1 (4 + 2 Punkte)
(a) Vervollständigen Sie den Beweis aus der Vorlesung, dass eine Spiegelung S_g an einer Geraden g daran Isometrien sind, indem Sie zeigen, dass auch für Punkte P, Q deren Lote auf g denselben Fußpunkt haben, der Abstand erhalten bleibt, d.h. $d(P, Q) = d(S_g(P), S_g(Q))$.
(b) Sei $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine beliebige Isometrie der Ebene. Zeigen Sie, dass $\Phi \circ S_g \circ \Phi^{-1}$ eine Spiegelung an einer Geraden ist und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 2 (2 + 3 + 2 Punkte)
(a) Zeigen Sie: Besitzt eine Isometrie genau einen Fixpunkt, so ist es eine Drehung um denselben.
(b) Zeigen Sie, dass jede Isometrie Orientierungen der Ebene (wie sie in der Vorlesung definiert wurden) in Orientierungen der Ebene überführt. Zeigen Sie, dass Spiegelungen an Geraden die Orientierung der Ebene umkehrt.
(c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung einer ungeraden Zahl von Geradenspiegelungen ungleich einer geraden Zahl von Geradenspiegelungen ist.

Aufgabe 3 (2 + 5 + 3 Punkte)
(a) Seien drei Geraden g, h, k gegeben, die durch einen Punkt P gehen. Wir studieren die Verknüpfung $S_k \circ S_h \circ S_g$ der drei dazu gehörenden Spiegelungen. Welcher Punkt ist offensichtlich ein Fixpunkt? Zeigen Sie, dass diese Verknüpfung eine Spiegelung ist.
(b) Der jeweils kleinere Winkel, der von g und h gebildet wird, habe Maß α, der der von h und k gebildet wird, habe das Maß β. Ermitteln Sie die Spiegelungsgerade, indem Sie den kleineren Winkel den dieser mit g bildet, bestimmen. Hinweis: Überlegen Sie, wie sich ein Punkt, dessen gespiegelter Punkt und die Spiegelgerade zueinander verhalten.
(c) Seien drei Geraden gegeben, die sich paarweise in insgesamt drei verschiedenen Punkten schneiden. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung der drei zugehörigen Spiegelungen keinen Fixpunkt besitzt. Hinweis: "Verfolgen" Sie einen als Fixpunkt vorausgesetzten Punkt unter den drei Spiegelungen. Wie verhalten sich die dabei entstehenden Punkte und die Spiegelungsgeraden zueinander?

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Seien drei Geraden wie in Aufgabe 3 (a) gegeben sowie ein Kreis K mit Mittelpunkt P. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Dreiecke, für die K der Umkreis und die Geraden die Mittelsenkrechten der drei Seiten sind. Leiten Sie die Konstruktion her, beschreiben Sie diese und erläutern Sie Durchführbarkeit und Korrektheit.
Hinweis: Wir arbeiten auf dem Blatt Papier, dem Modell für eine Geometrie mit allen Axiomen, inklusive dem Parallelenaxiom. Trotzdem wird dieses in den Argumenten hier nicht benötigt.
Tipp: Aufgabe 3 (a) ist natürlich hilfreich. Geben Sie sich (wie üblich) die Lösung (das Dreieck) vor, nehmen also an, die drei Geraden seien die Mittelsenkrechten des Dreiecks. Nun betrachten Sie die Verknüpfung der drei Spiegelungen an den Geraden. Bestimmen Sie deren Fixpunktmenge durch Probieren: Intuition oder *Geogebra* helfen. Aus dieser können Sie das Dreieck bestimmen. Da das Dreieck nicht gegeben ist, müssen Sie noch eine alternative Beschreibung dafür finden, die auf eine Konstruktion führt.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 21.1.–24.1. besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass für eine Verschiebung T_{AB} von A nach B und Punkte P, Q mit $PQ \parallel AB$ ebenfalls $d(P,Q) = d(T_{AB}(P), T_{AB}(Q))$ gilt (das wurde in der Vorlesung ausgelassen)
- Sei P ein Punkt $S_P : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Punktspiegelung in P. Sei $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie der Ebene. Zeigen Sie, dass $\Phi \circ S_P \circ \Phi^{-1}$ eine Punktspiegelung ist und bestimmen Sie den Spiegelungspunkt.
- Zeigen Sie: Sind drei echte Dreiecke $\Delta(A,B,C) \cong \Delta(A',B',C')$ kongruent, so gibt es genau eine Isometrie Φ mit $\Phi(A) = A', \Phi(B) = B'$ und $\Phi(C) = C'$.
- Zeigen Sie: Isometrien überführen Kreise in Kreise, d.h. für jeden Kreis K ist $\Phi(K)$ wieder ein Kreis.
- Besitzen zwei Geraden g, h keinen Schnittpunkt, so hat die Isometrie $S_g \circ S_h$ keine Fixpunkte. Das Parallelenaxioms vorausgesetzt, was ist das für eine Abbildung?
- Seien A, B, C drei Punkte. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung der drei Punktspiegelungen genau einen Fixpunkt besitzt. Hinweis: "Verfolgen" Sie einen als Fixpunkt vorausgesetzten Punkt unter den drei Spiegelungen. Wie verhalten sich die dabei enstehenden Punkte und die Spiegelungspunkte zueinander?
- Eine Isometrie $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ habe (wenigstens) zwei verschiedene Fixpunkte P und Q. Welche Art von Isometrie kann Φ dann nur sein? Begründen Sie Ihre Antwort.