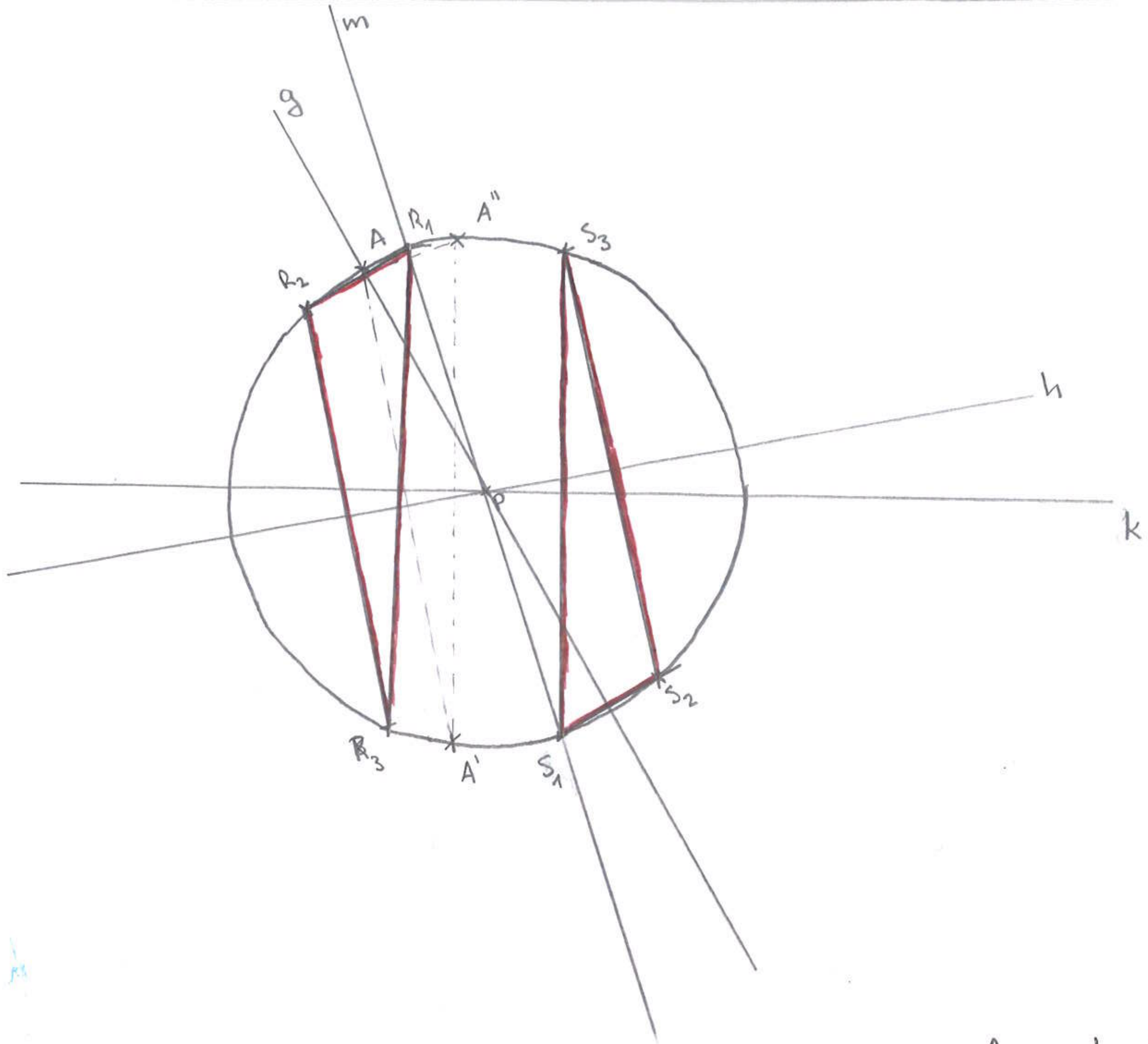
Lösungshinweise zu Blatt 12, Aufgabe 4

- Seien g, h, k Geraden, $P \in g \cap h \cap k$, und sei K ein Kreis mit Mittelpunkt P.

Konstruktionsbeschreibung

1. Sei $A \in g \cap K$. Konstruiere den Spiegelpunkt A' von A durch Spiegelung an Gerade h
2. Konstruiere Spiegelpunkt A'' von A' durch Spiegelung an Gerade k
3. Konstruiere Mittelsenkrechte m zu AA''. Erhalte $R_1, S_1 \in K \cap m$.
4. ~~...~~ Konstruiere Spiegelpunkt R_2 von R_1 durch Spiegelung an g
5. Konstruiere Spiegelpunkt R_3 von R_2 durch Spiegelung an h.
6. Konstruiere Spiegelpunkt S_2 von S_1 durch Spiegelung an g
7. Konstruiere Spiegelpunkt S_3 von S_2 durch Spiegelung an h.

$\Rightarrow$ Die Dreiecke $\Delta(R_1, R_2, R_3)$ und $\Delta(S_1, S_2, S_3)$ sind alle Dreiecke der gewünschten Art.



Bem:

1) Alle Konstruktionsschritte sind mit Zirkel und Lineal durchführbar, da die Mittelsenkrechte sowie die Spiegelung eines Punktes an einer Geraden durchführbar sind (s. VL).

2) Der obigen Konstruktion liegen folgende Beobachtungen zugrunde. Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck mit Mittelsenkrechten m_1, m_2, m_3. Dann gilt:

(i) $S_{m_i} \circ S_{m_j} \circ S_{m_k} =: S$ ist eine Spiegelung an einer Geraden m, wobei $S_{m_i}, S_{m_j}, S_{m_k}$ die Geradenspiegelungen an m_i, m_j, m_k bezeichnen und $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ sei. ↑ siehe A: 3(a))

Dies überlegt man sich leicht. (Nutze Definition der Mittelsenkrechten)

(ii) Es gibt einen Eckpunkt $E \in \{A,B,C\}$, s.d. gilt: $S(E) = E$ und $\{S_{m_k}(E), S_{m_j}(S_{m_k}(E)), E\} = \{A,B,C\}$. ~~Dies überlegt man sich leicht.~~

Korrektheit der Konstruktion

- Der Punkt $A'' \overset{\text{s. Konstruktion}}{=} S_k(A') = S_k(S_h(A)) = \underbrace{(S_k \circ S_h \circ S_g)}_{=:S}(A)$ entspricht der Spiegelung von A an einer Geraden m (s. obige Bemerkung 1)

$\Rightarrow$ Die Mittelsenkrechte m der Konstruktion entspricht eben dieser Gerade. Ein jeweils Eckpunkt der gesuchten Dreiecke muss also R_1 oder S_1 sein (siehe Bemerkung 2 oben).

$\overset{\text{Bem. oben}}{\Rightarrow}$ $\Delta(R_1, S_g(R_1), S_h(S_g(R_1)))$, $\Delta(S_1, S_g(S_1), S_h(S_g(S_1)))$ sind die einzigen Dreiecke, die alle gewünschten Eigenschaften besitzen.