

---

# Übungsblatt 12

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschläge für die Rückseite

---

Es seien alle Axiome außer dem Parallelenaxiom vorausgesetzt.

**Aufgabe:** Sei  $P$  ein Punkt  $S_P : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  die Punktspiegelung in  $P$ . Sei  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  eine Isometrie der Ebene. Zeigen Sie, dass  $\Phi \circ S_P \circ \Phi^{-1}$  eine Punktspiegelung ist und bestimmen Sie den Spiegelungspunkt.

Lösung: Der Spiegelungspunkt muss  $\Phi(P)$  sein. Sei nun  $X$  beliebiger Punkt. Dann ist  $P$  der Mittelpunkt der Strecke  $XS_P(X)$ . Eine Abbildung der Ebene auf sich für die das für all Punkte  $X$  gilt ist die Punktspiegelung in  $P$ . Insbesondere ist

$$d(X, S_P(X)) = d(X, P) + d(P, S_P(X)).$$

Da nun  $\Phi$  eine Isometrie ist folgt

$$d(\Phi(X), \Phi(S_P(X))) = d(\Phi(X), \Phi(P)) + d(\Phi(P), \Phi(S_P(X))).$$

Damit ist  $\Phi(P)$  der Mittelpunkt der Strecke  $\Phi(X)\Phi(S_P(X))$ . Das gilt insbesondere für  $X = \Phi^{-1}(Y)$  für einen beliebigen Punkt  $Y$ . Also ist  $\Phi(P)$  Mittelpunkt der Strecke  $Y\Phi(S_P(\Phi^{-1}(Y)))$ . Damit ist die Verknüpfung der Abbildungen der Ebene auf sich  $\Phi \circ S_P \circ \Phi^{-1}$  die Punktspiegelung an  $\Phi(P)$ .

**Aufgabe:** Zeigen Sie: Sind zwei echte Dreiecke  $\Delta(A, B, C) \cong \Delta(A', B', C')$  kongruent, so gibt es genau eine Isometrie  $\Phi$  mit  $\Phi(A) = A'$ ,  $\Phi(B) = B'$  und  $\Phi(C) = C'$ .

Lösung: Diese Abbildung wurde in der Vorlesung für den Nachweis der Gültigkeit der Axiome für die kartesiche Ebene konstruiert: Man spiegelt zunächst an der Mittelsenkrechten von  $AA'$ . Dabei seien  $B'', C''$  die Bildpunkte von  $B$  bzw.  $C$  ( $A$  geht in  $A'$  über). Dann spiegele man an der Mittelsenkrechten von  $B''B'$ . Selbige muss  $A'$  enthalten, da  $|A'B''| = |AB|$  (Spiegelungen sind Isometrien) und  $|AB| = |A'B'|$  (nach Voraussetzung). Der Bildpunkt von  $C'$  sei mit  $C'''$  bezeichnet (der Bildpunkt von  $A'$  ist  $A'$ , da er auf der Spiegelungsgeraden liegt und er von  $B''$  ist  $B'$ ). Wir erhalten ein Dreieck  $\Delta(A', B', C''') \cong \Delta(A', B', C')$ . Davon gibt es genau zwei, die durch Spiegelung an  $G(A', B')$  auseinander hervorgehen (warum?). Stimmen sie bereits überein, ist die gesuchte Isometrie die Verknüpfung der ersten beiden Spiegelungen, wenn nicht, die Verknüpfung der drei angegebenen. (Stimmte sie bereits von Beginn an oder nach der ersten Schritt überein, haben wir auch die Isometrie gefunden).

Sei  $\Phi'$  eine weitere Isometrie. Dann ist die Verknüpfung  $\Phi^{-1} \circ \Phi'$  eine Isometrie, die die drei nach Voraussetzung nicht kollinearen Punkte  $A, B, C$  fix lässt, also die Identität. Daraus folgt  $\Phi = \Phi'$ .

**Aufgabe:** Besitzen zwei Geraden  $g, h$  keinen Schnittpunkt, so hat die Isometrie  $S_g \circ S_h$  keine Fixpunkte. Das Parallelenaxioms vorausgesetzt, was ist das für eine Abbildung?

Lösung: Angenommen es gäbe einen Fixpunkt  $P$ . Man überzeugt sich leicht, dass  $P$  nicht auf  $h$  liegen kann, da sich die Geraden nicht schneiden. Dann ist  $h$  die Mittelsenkrechte von  $PP'$ , wobei  $P' = S_h(P)$  verschieden von  $P$ .  $P'$  kann nun auch nicht auf  $g$  liegen, weil sonst  $S_g(S_h(P')) = P' \neq P$ . Dann ist  $g$  die Mittelsenkrechte von  $P'$  und seinem Bildpunkt  $P = S_g(P')$ , da ja  $P$  Fixpunkt der Verknüpfung sein sollte. Wegen der Eindeutigkeit der Mittelsenkrechten erhalten wir einen Widerspruch. Gilt das Parallelenaxiom, so ist die Lotgerade von  $P$  auf  $g$  auch die Lotgerade von  $P$  auf  $h$ . Der Abschnitt zwischen  $g$  und  $h$  hat für alle Geraden senkrecht zu  $g$  und  $h$  dieselbe Länge  $d$ . Die Verknüpfung lässt sich leicht als die Verschiebung in Richtung  $AB$  identifizieren, wobei  $A \in h$ ,  $B \in g$  und  $AB \perp g$ .

---

**Aufgabe:** Seien  $A, B, C$  drei (verschiedene) Punkte. Zeigen Sie, dass die Verknüpfung der drei Punktspiegelungen genau einen Fixpunkt besitzt. Hinweis: "Verfolgen" Sie einen als Fixpunkt vorausgesetzten Punkt unter den drei Spiegelungen. Wie verhalten sich die dabei entstehenden Punkte und die Spiegelungspunkte zueinander?

Lösung: Wir setzen hier das Parallelenaxiom voraus oder nehmen an, dass es ein möglicherweise entartetes Dreieck  $\Delta(P, Q, R)$  gibt, für das  $B$  der Mittelpunkt von  $QR$ ,  $A$  der von  $PR$  und  $C$  der von  $PQ$  ist. Dann ist  $P$  ein Fixpunkt von  $S_A \circ S_B \circ S_C$ . Andererseits erhält die Punktspiegelung die Orientierung, d.h. die Verknüpfung ist entweder die Identität oder besitzt nur einen Fixpunkt. Nun ist aber für  $B' := S_C(B)$   $B = S_C(B') = S_B(S_C(B'))$ . Wäre nun  $B'$  ein Fixpunkt, so wären  $C$  und  $A$  Mittelpunkte der Strecke  $BB'$ , was zu  $A = C$  führt.  $S_A = S_A^{-1}$  und aus der ersten Aufgabe folgt, dass  $S_A \circ S_B \circ S_A^{-1}$  eine Punktspiegelung ist und besitzt folglich genau einen Fixpunkt.

**Aufgabe:** Eine Isometrie  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  habe (wenigstens) zwei verschiedene Fixpunkte  $P$  und  $Q$ . Welche Art von Isometrie kann  $\Phi$  dann nur sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Mit zwei Fixpunkten ist die Gerade durch diese ebenfalls enthalten in der Fixpunktmenge. Folglich kann die Isometrie nur entweder eine Spiegelung sein oder die Identität.