Übungsblatt 13

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 6.2.2019

Aufgabe 1 (1+ 2 + 2+ 2 + 2 + 1 Punkte)
Seien $v, w, v', w', X_0, X_1 \in \mathbb{R}^2$ wobei $\{v; w\}$ und $\{v'; w'\}$ Orthonormalbasen sind. Wir definieren (wie in der Vorlesung) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\Phi(X) := X_1 + (v \cdot (X - X_0))v' + (w \cdot (X - X_0))w'$$

wobei $x \cdot y$ das Skalarprodukt notiert.
(a) Erläutern Sie, warum Φ die Identität ist, falls $v' = v$, $w' = w$ und $X_0 = X_1$
(b) Zeigen Sie, dass Φ eine bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.
(c) Weisen Sie nach, dass Φ Strecken in Strecken überführt. Was bedeutet dies für Geraden, Strahlen, Halbebenen.
(d) Beweisen Sie, dass der lineare Teil von Φ, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) := (v \cdot x)v' + (w \cdot x)w'$$

das Skalarprodukt erhält, d.h. dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$x \cdot y = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

(e) Zeigen Sie, dass Φ abstandserhaltend ist.
(f) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (4+3 Punkte)
(a) Seien $h = \{P + tv \mid t \geq 0\}$ und $k = \{P + tw \mid t \geq 0\}$ zwei Strahlen in $P \in \mathbb{R}^2$, $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\measuredangle(h, k)$ genau dann ein rechter Winkel ist, wenn $v \cdot w = 0$, indem Sie die Abbildung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S(X) = X - 2(v' \cdot (X - P))v'$ aus der Vorlesung auf den Winkel anwenden. Dabei ist $v' \in \mathbb{R}^2$ orthogonal zu v, $\|v'\| = 1$. Daraus folgt eine Richtung. Wie folgt die andere?
Anmerkung: $S(x)$ ist die Spiegelung an der zu h gehörenden Geraden. Die Gleichheit folgt leicht mit Aufgabe 1 (a), wenn man $\|v\| = 1$ voraussetzt, bzw. v normiert.
(b) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras in der kartesischen Ebene.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Seien $\lambda > 0$ gegebene reelle Zahlen und P, Q zwei Punkte in der kartesischen Ebene. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte R mit $|QR|/|PR| = \lambda$ ein Kreis oder eine Gerade ist. Beschreiben Sie in jedem Fall die Menge dieser Punkte genau (welche Gerade, welcher Kreis).
Hinweis: Diese Aufgabe kann sowohl analytisch als auch geometrisch gelöst werden.

Aufgabe 4 (2+2+3 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $A = (2, -3)$, $B = (6, 4)$ und $C = (10, -4)$ gleichschenklig ist. Ist es spitz-, recht-, oder stumpfwinklig?
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $A = (1, 0)$, $B = (-1, 4)$ und $C = (8, 1)$ sowie den Radius des Umkreises.
(c) Eine Seite eines Quadrats liege auf einer Seitengeraden eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$, während die beiden anderen Eckpunkte des Quadrats auf je einer der anderen beiden Seiten des Dreiecks liegen. Bestimmen Sie die Seitenlänge des Quadrats, falls die Länge der erstgenannten Dreiecksseite und die zugehörige Höhe bekannt sind.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 28.1.–31.1. besprochen werden:

a) Zeigen Sie, dass Inzidenz-, Abstands-, Trennungs- und Parallelenaxiom in der kartesischen Ebene gelten.

b) Seien P und Q zwei Punkte der Ebene, $a > 0$ eine reelle Zahl. Beschreiben Sie, welches geometrische Objekt die Menge aller Punkte R ist, für die $|PR|^2 + |QR|^2 = a^2$.

c) Sei $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck in der kartesischen Ebene. Bestimmen Sie den Schwerpunkt, den Mittelpunkt und Radius des des Inkreises, den Flächeninhalt,... in Abhängigkeit der Koordinaten der Eckpunkte.

d) Bestimmen Sie die längste Seite des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $A = (-3, 1)$, $B = (4, 2)$ und $C = (3, -1)$. Bestimmen Sie den Winkel, der dieser Seite gegenüberliegt.

e) Sei einem rechtwinkligen Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ein Quadrat so einbeschrieben, dass eine komplette Seite auf der Hypothenuse liegt, während die verbliebenen beiden Eckpunkte auf je einer Kathete liegen. Zeigen Sie, dass die Seitenlänge des Quadrats das geometrische Mittel der Längen der beiden Strecken ist, in die das Komplement der Quadratseite in der Hypothenuse zerfällt.

f) (i) Sei $ABCD$ ein Quadrat in der kartesischen Ebene, dessen Mittelpunkt der Ursprung $(0, 0)$ ist. Seien $A = (a, b)$ die Koordinaten von A. Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen drei Eckpunkte. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
(ii) Sei $ABCD$ ein Quadrat und g eine Gerade durch dessen Mittelpunkt. Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Eckpunkte von g nicht von der Wahl einer solchen Gerade abhängt.