
Übungsblatt 13

Geometrie WS 2018/19

Lösungshinweise zur Aufgabe 1

Aufgabe 1 (1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Seien $v, w, v', w', X_0, X_1 \in \mathbb{R}^2$ wobei $\{v; w\}$ und $\{v'; w'\}$ Orthonormalbasen sind. Wir definieren (wie in der Vorlesung) $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\Phi(X) := X_1 + (v \cdot (X - X_0))v' + (w \cdot (X - X_0))w'$$

wobei $x \cdot y$ das Skalarprodukt notiert.

- (a) Erläutern Sie, warum Φ die Identität ist, falls $v' = v, w' = w$ und $X_0 = X_1$
- (b) Zeigen Sie, dass Φ eine bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung an.
- (c) Weisen Sie nach, dass Φ Strecken in Strecken überführt. Was bedeutet dies für Geraden, Strahlen, Halbebenen.
- (d) Beweisen Sie, dass der lineare Teil von $\Phi, \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) := (v \cdot x)v' + (w \cdot x)w'$$

das Skalarprodukt erhält, d.h. dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$x \cdot y = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

- (e) Zeigen Sie, dass Φ abstandserhaltend ist.
- (f) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis auf \mathbb{R}^2 .

Lösung: Zu (a) Da $\{v; w\}$ Basis gibt es (eindeutig bestimmte) reelle Zahlen λ, μ mit

$$X - X_0 = \lambda v + \mu w.$$

Da es sich um eine Orthonormalbasis handelt ist $\lambda = v \cdot (X - X_0)$ und $\mu = w \cdot (X - X_0)$. Daraus ergibt sich unter den angegebenen Bedingungen

$$\Phi(X) = X_0 + (v \cdot (X - X_0))v + (w \cdot (X - X_0))w = X_0 + \lambda v + \mu w = X_0 + (X - X_0) = X.$$

zu (b) Definieren $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\Psi(X) := X_0 + (v' \cdot (X - X_1))v + (w' \cdot (X - X_1))w$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi(X)) &= X_0 + (v' \cdot ((v \cdot (X - X_0))v' + (w \cdot (X - X_1))w'))v + (w' \cdot ((v \cdot (X - X_0))v' + (w \cdot (X - X_0))w'))w \\ &= X_0 + (v \cdot (X - X_0))v + (w \cdot (X - X_0))w \\ &= X. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit benutzen wir, dass $\{v'; w'\}$ eine Orthonormalbasis ist, bei der letzten (a).

Zu (c) Hier benutzt man, dass Φ abstandserhaltend und bijektiv ist. Wie bei Isometrien einer euklidischen Ebene (siehe Vorlesung), benutzt man, dass $C \in AB$ g.d.w. $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$. Dann folgt: $d(\Phi(A), \Phi(C)) + d(\Phi(C), \Phi(B)) = d(\Phi(A), \Phi(B))$, woraus folgmt, dass $\Phi(C)$ auf der Strecke $\Phi(A)\Phi(B)$ liegt. Umgekehrt ist Φ^{-1} ebenfalls abstandserhaltend also für $D \in \Phi(A)\Phi(B)$ ist $\Phi^{-1}(D) \in AB$. Somit folgt, dass die Strecken $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$ gleich sind. Daraus folgt unmittelbar, dass geraden in geraden überführt werden. Da Strahlen und Halbebenen mithilfe des Streckenbegriffs definiert werden, folgt auch, dass Strahlen in Strahlen und Halbebenen in Halbebenen übergehen.

Zu (d) Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}\varphi(x) \cdot \varphi(y) &= ((v \cdot x)v' + (w \cdot x)w') \cdot ((v \cdot y)v' + (w \cdot y)w') \\ &= (v \cdot x)(v \cdot y) + (w \cdot x)(w \cdot y).\end{aligned}$$

Hier benutzen wir, dass $\{v'; w'\}$ eine Orthonormalbasis ist. Mit $x = \lambda v + \mu w$ und $y = \lambda' v + \mu' w$ und $\lambda = v \cdot x$ usw. (siehe (a)) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi(x) \cdot \varphi(y) &= \lambda\lambda' + \mu\mu' \\ &= (\lambda v + \mu w) \cdot (\lambda' v + \mu' w) \\ &= x \cdot y.\end{aligned}$$

Hier benutzen wir, dass $\{v; w\}$ eine Orthonormalbasis ist.

Zu (e) Zu zeigen ist: $\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| = \|X - Y\|$ für die euklidische Norm. Wir quadrieren beide Seiten und benutzen, dass das Quadrat der Norm das Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst ist. Wir benutzen noch

$$\begin{aligned}\Phi(X) - \Phi(Y) &= X_1 + (v \cdot (X - X_0))v' + (w \cdot (X - X_0))w' - (X_1 + (v \cdot (Y - X_0))v' + (w \cdot (Y - X_0))w') \\ &= (v \cdot (X - Y))v' + (w \cdot (X - Y))w'\end{aligned}$$

wegen der Bilinearität des Skalarprodukts. Also

$$\begin{aligned}(\Phi(X) - \Phi(Y)) \cdot (\Phi(X) - \Phi(Y)) &= ((v \cdot (X - Y))v' + (w \cdot (X - Y))w') \cdot ((v \cdot (X - Y))v' + (w \cdot (X - Y))w') \\ &= (v \cdot (X - Y))^2 + (w \cdot (X - Y))^2 \\ &= \lambda^2 + \mu^2 \\ &= (X - Y) \cdot (X - Y).\end{aligned}$$

Dabei sei $X - Y = \lambda v + \mu w$ bezgl. der Basis $\{v; w\}$ und wir nutzen bei der zweiten und dritten Gleichheit wieder, dass $\{v; w\}$ und $\{v'; w'\}$ Orthonormalbasen sind.

Zu (f) Die Matrixeintrag a_{ij} erhält man, indem man den Vektor e_i der Standardbasis $\{e_1; e_2\}$ einsetzt und das Ergebnis skalarmultipliziert mit e_j . Dann bekommt man

$$a_{ij} = (e_i \cdot v)(e_j \cdot v') + (e_i \cdot w)(e_j \cdot w').$$

Mit $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2), v' = (v'_1, v'_2), w' = (w'_1, w'_2)$ erhält man

$$a_{ij} = v_i v'_j + w_i w'_j.$$

Ende der Lösung.

Man kann das noch etwas schöner schreiben, indem man v, w, v', w' als Spaltenvektoren auffasst. Dann ist z.B. $v \cdot v' = v^T v'$ mit v^T die "Transponierte" von v , d.h. der zugehörige Zeilenvektor. Dann ist

$$a_{ij} = v' v^T + w' w^T.$$

(Achtung! Die Reihenfolge der Faktoren ist vertauscht im Vgl. zum Skalarprodukt!)

Für die Matrix A gilt

$$A^T A = (v' v^T + w' w^T)^T (v' v^T + w' w^T) = v v'^T v' v^T + v v'^T w' w^T + w w'^T v' v^T + w w'^T w' w^T$$

Man rechne zuerst die mittleren Produkte $v'^T v'$ usw. aus. Dies sind aber einfach die Skalarprodukte, also ist der letzte Ausdruck

$$= v v^T + w w^T$$

da $\{v'; w'\}$ eine Orthonormalbasis ist. Letzter Ausdruck ist aber nach (f) die Matrixdarstellung für φ , falls $v = v'$ und $w = w'$ und dies ist nach (a) die Identität, also ist

$$A^T A = \mathbb{E}_2$$

die Einheitsmatrix, d.h. A ist eine orthogonale Matrix.