Übungsblatt 13

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschläge für die Rückseite

Aufgabe: Seien P und Q zwei Punkte der Ebene, $a > 0$ eine reelle Zahl. Beschreiben Sie, welches geometrische Objekt die Menge aller Punkte R ist, für die $|PR|^2 + |QR|^2 = a^2$.

Lösung: Nach Anwendung einer Isometrie können wir o.B.d.A. annehmen, dass $P = (0, 0)$ und $Q = (q, 0)$ ist. Dann ist die gesuchte Menge beschrieben durch

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - q)^2 + x_2^2 = a^2\}$$

Nun ist

$$x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - q)^2 + x_2^2 = 2x_1^2 - 2qx_1 + q^2 + 2x_2^2 = a^2$$

was äquivalent ist zu

$$(x_1 - \frac{q}{2})^2 + x_2^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{q^2}{4}$$

Die Menge ist also leer, falls $\sqrt{2}a < q$, genau aus dem Punkt $(\frac{q}{2}, 0)$ falls $\sqrt{2}a = q$ und aus einem Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{q}{2}, 0)$ udn Radius $\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{q^2}{4}}$ im verbleibenden Fall.

Aufgabe: Sei einem rechtwinkligen Dreieck in $\mathbb{R}^2$ ein Quadrat so einbeschrieben, dass eine komplette Seite auf der Hypothenuse liegt, während die verbliebenen beiden Eckpunkte auf je einer Kathete liegen. Zeigen Sie, dass die Seitenlänge des Quadrats das geometrische Mittel der Längen der beiden Strecken ist, in die das Komplement der Quadratseite in der Hypothenuse zerfällt.

Lösung: Man kann diese Aufgabe mit ähnlichkeitssätzen lösen. Hier wird eine analytische Lösung vorgeschlagen:

Fertigen Sie sich eine Skizze an.
Wähle A, B, C so, dass der rechte Winkel in C liegt, $A = (0, 0), B = (b, 0)$ und $C = (c_1, c_2)$ (nach Anwenung einer Isometrie). Der rechte Winkel zieht dann

$$(c_1 - b)c_1 + c_2^2 = 0$$

nach sich. Für die Punkte $P, Q \in AB$, $R \in BC$ und $S \in AC$ gilt zunächst

$$S = (\lambda c_1, \lambda c_2), \quad R = (\lambda c_1 + (1 - \lambda)b, \lambda c_2),$$

da $RS \parallel AB$ für ein $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist

$$P = (\lambda c_1, 0), \quad Q = (\lambda c_1 + (1 - \lambda)b, 0),$$

da $SP \perp AB$ und $RQ \perp AB$. $PQRS$ ist nun ein Quadrat, falls $|PS| = |PQ|$ also

$$\lambda c_2 = (1 - \lambda)b$$

woraus

$$\lambda = \frac{b}{b + c_2}.$$

Die Behauptung $|AP||QB| = |PQ|^2$ folgt nun mit

$$\frac{bc_1}{b + c_2} \frac{b(b - c_1)}{b + c_2} = \frac{b^2}{(b + c_2)^2} c_1(b - c_1) = \frac{b^2}{(b + c_2)^2} c_2^2 = \frac{(bc_2)^2}{(b + c_2)^2}.$$

Aufgabe: (i) Sei $ABCD$ ein Quadrat in der kartesischen Ebene, dessen Mittelpunkt der Ursprung $(0,0)$ ist. Seien $A = (a,b)$ die Koordinaten von A. Bestimmen Sie die Koordinaten der anderen drei Eckpunkte. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
(ii) Sei $ABCD$ ein Quadrat und g eine Gerade durch dessen Mittelpunkt. Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Eckpunkte von g nicht von der Wahl einer solchen Gerade abhängt.

Lösung: (i) Für den Mittelpunkt M eines Quadrates gilt $MA \perp MB$, $M \in AC$ usw. Da $A - M = A = (a,b)$ folgt mit $|MA| = |MB|$, dass $B = (b,-a)$ oder $B = (-b,a)$. Wir können (nach Umnummerierung annehmen, dass $B = (b-a)$ ist. Außerdem folgt aus $M \in AC$ und $|MA| = |MC|$, dass $C = (-a,-b)$ und schließlich $D = (-b-a)$.
(ii) Nach Anwendung einer Isometrie können wir annehmen, dass die Gerade $g = \mathbb{R} \times \{(0,0)\}$. Die Eckpunkte haben dann Koordinaten $A = (a,b)$, $B = (b,-a)$ usw. mit Abstand zu g $d(A,g) = d(C,g) = |b|$, $d(B,g) = d(D,g) = |a|$. Also ist die Summe der Quadrate der Abstände gleich $2a^2 + 2b^2$. Noch ist die Unaghängigkeit von der Wahl von g zu zeigen, von der insbesondere die Koordinaten (a,b) abhängen. Nun ist $a^2 + b^2 = |MA|^2$ und $|AB|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 = 2|MA|^2 = 2a^2+2b^2$, d.h. die Summe der Quadrate der Abstände ist gleich dem Fl—ächeninhalt des Quadrates.