Übungsblatt 14

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 13.2.2019

Hinweis: Das ist das letzte Übungsblatt mit Hausaufgaben. Das Parallelenaxiom ist immer vorausgesetzt.

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)
(a) Seien $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$ drei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks durch die Formel

$$F = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Insbesondere sind A, B, C genau dann kollinear, wenn die obige Determinante verschwindet.
Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst, dass beide Seiten unverändert unter Parallelverschiebung sind und daher o.B.d.A. $A = (0, 0)$ angenommen werden darf. Das vereinfacht die Notationen. Benutzen Sie eine Ihnen bekannte Formel für den Flächeninhalt (die Heronsche Formel ist ungeeignet).
(b) Zeigen Sie folgende Behauptung: Seien $P \in G(B, C), Q \in G(C, A)$ und $R \in G(A, B)$, $P \neq C$, $Q \neq A$ und $R \neq B$. Seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ gegeben durch $P - B = \lambda(C - P), Q - C = \mu(A - Q), R - A = \nu(B - R)$ (siehe Satz von Ceva der Vorlesung). P, Q, R liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\lambda\mu\nu = -1$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
In einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ seien mit D, E, F die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC, AC bzw. AB bezeichnet. Zeigen Sie, dass sich die Strecken AD, BE und CF in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Zeigen Sie für jedes Parallelogramm in der kartesischen Ebene, dass die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seiten ist.

Aufgabe 4 (4 + 4 Punkte)
(a) Bestimmen Sie, was für eine Isometrie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

definiert wird. Untersuchen Sie gegebenenfalls, ob es eine Spiegelung oder eine Drehung ist. Bestimmen Sie auch die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.
(b) Es seien zwei Drehungen mit unterschiedlichen Drehzentren gegeben. Diskutieren Sie, welche Art von Isometrie die Verknüpfung der beiden Abbildungen sein kann. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen welcher Fall eintritt. Bestimmen Sie die definierenden Daten (Drehzentrum und -winkel usw.). Hinweis: Sie können die Daten sowohl geometrisch als auch analytisch mithilfe kartesischer Koordinaten lösen.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 4.2.–7.2. besprochen werden.

a) (i) Sei $\measuredangle(h,k)$ ein Winkel in $\mathbb{R}^2$ mit Scheitelpunkt P. Seien $A, C \in h$ und $B, D \in k$ mit $|PC| \geq |PA| = |PB|$ und $|PD| \geq |PB|$. Zeigen Sie, dass dann $|CD| \geq |AB|$.
(ii) Die Punkte seien wie in (i) gegeben. Sei weiterhin für alle Punkte $E \in CD$ $|PE| \geq 1 = |PA| = |PB|$. Zeigen Sie, dass dann $|CD| \geq |\measuredangle(h,k))|$, d.h. größer als die Länge des Bogenmaßes des Winkels ist.

b) (i) Zwei Kreise in der kartesischen Ebene schneiden sich in zwei Punkten. Leiten Sie die Geradengleichung aus den beiden Gleichungen her, die die Kreise beschreiben.
(ii) Drei Kreise in der kartesischen Ebene schneiden sich nun paarweise in zwei Punkten. Zeigen Sie, dass sich die drei Geraden, die jeweils durch diese zwei Punkte gehen, parallel sind oder sich in einem Punkt schneiden, indem Sie die Geradengleichungen benutzen.

c) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Ceva, dass sich die Höhengeraden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

d) Zeigen Sie für jedes Rechteck $ABCD$ in der kartesischen Ebene und einen beliebigen Punkt P, dass
$$|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2.$$

e) Bestimmen Sie, was für eine Isometrie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch
$$\phi(x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1 - \sqrt{2} \right)$$
gegeben wird. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.

f) Welche Isometrie ist die Verknüpfung der Drehungen um $\pi/2$ in den Ecken eines Quadrates, in der Reihenfolge, in der sie üblicherweise nummeriert werden (entgegen dem Uhrzeigersinn).