Übungsblatt 14

Geometrie WS 2018/19

Lösungshinweise zu den Hausaufgaben

Das Parallelenaxiom ist vorausgesetzt.

Aufgabe 1
(a) Seien $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$ drei Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks durch die Formel

$$F = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

gegeben ist. Insbesondere sind A, B, C genau dann kollinear, wenn die obige Determinante verschwindet.
Hinweis: Überzeugen Sie sich zunächst, dass beide Seiten unverändert unter Parallelverschiebung sind und daher o.B.d.A. $A = (0, 0)$ angenommen werden darf. Das vereinfacht die Notationen. Benutzen Sie eine Ihnen bekannte Formel für den Flächeninhalt (die Heronsche Formel ist ungeeignet).
(b) Zeigen Sie folgende Behauptung: Seien $P \in G(B, C), Q \in G(C, A)$ und $R \in G(A, B)$, $P \neq C$, $Q \neq A$ und $R \neq B$. Seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ gegeben durch $P - B = \lambda(C - P), Q - C = \mu(A - Q), R - A = \nu(B - R)$ (siehe Satz von Ceva der Vorlesung). P, Q, R liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $\lambda\mu\nu = -1$.

Lösung: Zu (a) Die Parallelverschiebung ändert natürlich die linke Seite nicht, da der Flächeninhalt unter Isometrien unverändert bleibt. Für die rechte Seite: Die Determinante bleibt unverändert, wenn man das a_1-Fache der letzten Spalte von der ersten und das a_2-fache der letzten Spalte von der zweiten Spalte abzieht. Das ist aber genau die zu zeigende Formel für das parallelverschobene Dreieck.

Der Kosinus des Innenwinkels in A ist gegeben durch

$$\cos(\alpha) = \frac{C \cdot B}{\|B\|\|C\|} = \frac{b_1c_1 + b_2c_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

und damit der Sinus durch

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{(b_1c_1 + b_2c_2)^2}{(b_1^2 + b_2^2)(c_1^2 + c_2^2)}}.$$

Mit $|AB| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ und $|AC| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ erhalten wir insgesamt

$$2F = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2)(c_1^2 + c_2^2) - (b_1c_1 + b_2c_2)^2} = \sqrt{b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - 2b_1c_2b_2c_1} = \sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2} = |b_1c_2 - b_2c_1|.$$

Das ist aber genau die zu beweisende Formel. Alternativ kann man beide Seiten quadrieren, ausmultiplizieren und dann vergleichen.
A, B, C sind genau dann kollinear, wenn das Dreieck $\Delta(A, B, C)$ entartet ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $F = 0$ ist. Man kann die Kollinearität auch direkt aus dem Kriterium für eine verschwindende Determinante sehen, ohne den Flächeninhalt auszurechnen.

Zu (b) Wie in (a) kann man o.B.d.A. annehmen, dass $A = (0, 0)$ ist. Dann ist $P = \frac{1}{\lambda+1}B + \frac{\lambda}{\lambda+1}C$, $Q = \frac{1}{\mu+1}C$ und $R = \frac{\nu}{\nu+1}B$. Mit a bedeutet dies, dass P, Q, R genau dann auf einer Geraden liegen, wenn

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+1}b_1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}c_1 & \frac{1}{\lambda+1}b_2 + \frac{\lambda}{\lambda+1}c_2 & 1 \\ \frac{1}{\mu+1}c_1 & \frac{1}{\mu+1}c_2 & 1 \\ \frac{\nu}{\nu+1}b_1 & \frac{\nu}{\nu+1}b_2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist gleich

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{1}{\lambda+1}b_1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}c_1)\frac{1}{\mu+1}c_2 - (\frac{1}{\lambda+1}b_2 + \frac{\lambda}{\lambda+1}c_2)\frac{1}{\mu+1}c_1 \\
&- (\frac{1}{\lambda+1}b_1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}c_1)\frac{\nu}{\nu+1}b_2 + (\frac{1}{\lambda+1}b_2 + \frac{\lambda}{\lambda+1}c_2)\frac{\nu}{\nu+1}b_1 \\
&+ \frac{1}{\mu+1}c_1\frac{\nu}{\nu+1}b_2 - \frac{1}{\mu+1}c_2\frac{\nu}{\nu+1}b_1 \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}((\nu+1) + \lambda\nu(\mu+1) - \nu(\lambda+1))(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}(\lambda\mu\nu + 1).
\end{aligned}
$$

Insbesondere liegen also P, Q, R genau dann aif einer Geraden, wenn $\lambda\mu\nu = -1$ ist.
Hinweis: Die Aufgabe war teilweise schon einmal in einem anderen Lehrkontext als Problem gestellt (Blatt 6, Aufgabe 2).

Aufgabe 2
In einem Dreieck $\Delta(A, B, C)$ seien mit D, E, F die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC, AC bzw. AB bezeichnet. Zeigen Sie, dass sich die Strecken AD, BE und CF in einem Punkt schneiden.

Lösung: Es gilt $|AE| = |AF|, |BD| = |BF|$ und $|CD| = |CE|$ (Tangentenabschnitte von Tangenten an einen Kreis, die durch einen gemeinsamen Punkt außerhalb gehen, sind gleichlang (Blatt 8, Rückseite d)). Die Parameter λ, μ, ν aus dem Satz des Ceva sind positiv, da D, E, F im Inneren der Seiten des Dreiecks liegen. Außerdem gilt

$$\lambda = \frac{|BD|}{|CD|}, \quad \mu = \frac{|CE|}{|AE|}, \quad \nu = \frac{|AF|}{|BF|}.$$

Also

$$\lambda\mu\nu = \frac{|BD||CE||AF|}{|CD||AE||BF|} = \frac{|BD||CE||AF|}{|BD||CE||AF|} = 1$$

und mit dem Satz con Ceva folgt, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Zeigen Sie für jedes Parallelogramm in der kartesischen Ebene, dass die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seiten ist.

Lösung: Seien die Eckpunkte mit A, B, C, D in der üblichen Weise bezeichnet. Dann gibt es zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$, so dass $B = A + v$, $D = A + w$ und $C = A + v + w$. Damit ist

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |CA|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Andererseits ist

$$
\begin{aligned}
|AC|^2 + |BD|^2 &= \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = (v+w)\cdot(v+w) + (v-w)\cdot(v-w) \\
&= v\cdot v + w\cdot w + 2v\cdot w + v\cdot v + w\cdot w - 2v\cdot w \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also die behauptete Gleichheit.

Aufgabe 4   (4 + 4 Punkte)
(a) Bestimmen Sie, was für eine Isometrie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\phi(x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

definiert wird. Untersuchen Sie gegebenenfalls, ob es eine Spiegelung oder eine Drehung ist. Bestimmen Sie auch die Spiegelungsachse bzw. das Drehzentrum und den Drehwinkel.
(b) Es seien zwei Drehungen mit unterschiedlichen Drehzentren gegeben. Diskutieren Sie, welche Art von Isometrie die Verknüpfung der beiden Abbildungen sein kann. Geben Sie an, unter welchen Bedingungen welcher Fall eintritt. Bestimmen Sie die definierenden Daten (Drehzentrum und -winkel usw.). Hinweis: Sie können die Daten sowohl geometrisch als auch analytisch mithilfe kartesischer Koordinaten lösen.

Lösung: Zu (a) Die Abbildung ist der Form $\phi(x) = Ax + b$, wobei $x = (x_1, x_2)$ als Spaltenvektor aufgefasst wird, A eine 2×2–Matrix und $b \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor ist mit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Man erkennt leicht, dass A orthogonal ist (nicht gefordert!). Außerdem ist $\det A = -1$. Damit kann ϕ nur eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung sein. Nun ist

$$A - \mathbb{E}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

woraus man unmittelbar sieht, dass $b \in Im(A - \mathbb{E}_2)$. Damit ist ϕ eine Spiegelung. Die Spiegelachse ist parallel zu $v \in Ker(A - \mathbb{E}_2)$ mit

$$v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung der Fixpunktgleichung findet man leicht z.B.

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Gerade, an der gespiegelt wird durch

$$g = \{x_0 + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist (der Lösungsmenge der Fixpunktgleichung). Dies ist die Gerade durch $(-1, 0)$ mit Steigungswinkel von $\pi/6$, d.h. 30^o.