Übungsblatt 15

Geometrie WS 2017/18

Folgende Kontrollfragen können Ihnen helfen, Ihren Wissensstand zu Kreisspiegelungen sowie zum Poincaré-Modell der oberen Halbebene zu prüfen. Sie sollen die Definitionen und einfache Eigenschaften kennen. Die mit (*) gekennzeichneten Fragen sind nicht relevant für die Prüfungen. Alle anderen Fragen wurden in den Vorlesungen diskutiert. Beachten Sie, dass (k),(l),(m),(p),(q) gar keine neuen Fragestellungen sind. Sie dienen eher der Wiederholung von bereits Diskutiertem. Zum Beispiel unterstreicht (k), dass für den Beweis das Parallelenaxiom nicht benötigt wird, während (m) darauf hinweist, dass jeder korrekte Beweis der Existenz eines Umkreises für jedes Dreieck in der euklidischen Ebene das Parallelenaxiom oder Folgerungen daraus benutzen **muss**.

Kreisspiegelungen

a) Wie sind Kreisspiegelungen definiert?

b) Welche Eigenschaften besitzen Kreisspiegelungen? Wie sieht die Fixpunktmenge aus?

c) Gegeben sei ein Kreis $K = K(M, r)$ und eine ihn schneidende Gerade g. Beschreiben Sie das Bild $S_K(g)$ der Kreisspiegelung. Konstruieren Sie es. Bestimmen Sie nun für einen beliebigen Punkt $P \in g$ nur mithilfe eines Lineals den Bildpunkt $S_K(P)$. Führen Sie dieselbe Aufgabe für einen beliebigen Punkt $Q \in S_K(g)$ aus.

d) Gegeben sei ein Kreis $K = K(M, r)$, ein Punkt P. Konstruieren Sie mit Zirkel und Linael den Bildpunkt $S_K(P)$ unter der Kreisspiegelung an K.

e) (*) Gegeben sei ein Kreis $K = K(M, r)$, ein Punkt P außerhalb des Kreises und eine Gerade g durch P, die M nicht enthalte. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal einen Kreis durch P, der tangential an g ist und K in rechten Winkeln schneidet. Hinweis: Das wurde nach Lemma 59 der Vorlesung kurz diskutiert.

f) Gegeben sei ein Kreis $K = K(M, r)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $M \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Begründen Sie, dass S_K Punkte in $\mathbb{H} := \{(x_1 x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ auf Punkte in $\mathbb{H}$ abbildet. Begründen Sie weiterhin, dass S_K Geraden und Kreise, die $\mathbb{R} \times \{0\}$ in rechten Winkeln schneiden in ebensolche Geraden **oder** Kreise überführt.

Poincaré-Modell der oberen Halbebene

a) Beschreiben Sie die die Menge der Punkte und die Menge der Geraden des Poincaré–Modells.

b) Weisen Sie die Gültigkeit des Inzidenzaxioms für die oben beschriebene Menge der Geraden nach.

c) Begründen Sie, dass das Parallelenaxiom nicht gilt. Beschreiben Sie für eine von Ihnen gewählte hyperbolische Gerade g und einen Punkt $P \in \mathbb{H}$ außerhalb dieser alle hyperbolischen Geraden durch P, die g nicht schneiden, also parallel dazu sind.

d) Beschreiben Sie den Abstand im Poincaré-Modell.

e) Erläutern Sie, warum das Trennungsaxiom gilt.

f) Beschreiben Sie das Winkelmaß im Poincaré-Modell.

g) Erläutern Sie, warum das Winkelmaßaxiom gilt.

h) (*) Erläutern Sie die Strategie zum Nachweis des Kongruenzaxioms (vergleichen Sie dies mit dem Nachweis dieses Axioms für die kartesische Ebene). Welche entscheidenden Eigenschaften der (euklidischen) Kreisspiegelungen bzw. Spiegelungen an hyperbolischen Geraden wird dabei benutzt?

i) Welche Eigenschaften des Abstandes, von Winkeln, von Dreiecken usw. gelten für das Poincaré-Modell?

j) Welche Eigenschaften der euklidischen Geometrie gelten nicht?

k) Begründen Sie, dass jedes hyperbolische Dreieck in $\mathbb{H}$ einen Inkreis besitzt.

l) Begründen Sie: schneiden sich die Mittelsenkrechten zweier Seiten eines hyperbolischen Dreiecks in $\mathbb{H}$ in einem Punkt, so schneiden sich alle drei Seitenmittelsenkrechten in einem Punkt. Außerdem besitzt das Dreieck genau dann einen Umkreis.

m) Geben Sie ein Beispiel für ein hyperbolisches Dreieck in $\mathbb{H}$ an, für das Letzteres nicht der Fall ist. Vergleichen Sie mit dem entsprechenden Fakt für euklidische Dreiecke. Welche Eigenschaft muss in einem korrekten Beweis für die Existenz eines Umkreises benutzt werden?

n) (*) Zeigen Sie, dass Kreise im Poincaré–Modell genau die Kreise in $\mathbb{R}^2$ sind, die komplett in $\mathbb{H}$ liegen. Dabei können Sie wie folgt vorgehen: Sei $K = K(M, r)$ ein solcher Kreis mit Mittelpunkt M. Wie schneiden die hyperbolischen Geraden durch M den Kreis K? Sei M' der zweite gemeinsame Schnittpunkt in $\mathbb{R}^2$ aller dieser eukidischen Kreise und Geraden, die den hyperbolischen Geraden entsprechen. Betrachten Sie die Bilder aller dieser und von K unter der Kreisspiegelung S_L an $L = K(M', |MM'|)$. Beschreiben Sie die Bilder der eukidischen Kreise und Geraden, die den hyperbolischen Geraden entsprechen. Wie verhält sich das Bild $K' = S_L(K)$ dazu? Folgern Sie daraus, dass K' ein euklidischer Kreis ist.

o) (*) Folgerung aus vorigem Punkt: Formulieren Sie ein Kriterium dafür, dass ein Dreieck im Poincaré–Modell einen Umkreis besitzt.

p) Begründen Sie, dass die Kreisspiegelungen bzw. Spiegelungen an hyperbolischen Geraden hyperbolische Spiegelungen sind.

q) Begründen Sie, dass jede Isometrie von $\mathbb{H}$ Verknüpfung von maximal drei Kreisspiegelungen bzw. Spiegelungen an hyperbolischen Geraden ist.

r) (*) In der euklidischen Ebene gilt: Die Verknüpfung zweier Drehungen (auch mit unterschiedlichen Drehzentren) für die die Summe der Drehwinkel kein Vielfaches von 2π ist, ist wieder eine Drehung. Der Drehwinkel ist dabei gleich dieser Summe. Finden Sie ein Beispiel im Poincaré–Modell für zwei Drehungen mit unterschiedlichen Drehzentren für die die Summe der Drehwinkel kein Vielfaches von 2π ist und deren Verknüpfung keinen Fixpunkt besitzt. Hinweis: Parallele Geradenpaare, die den Gegenwinkelsatz verletzen sind hilfreich).

s) (*) In der euklidischen Ebene gilt: Eine Isometrie, die keine Drehung ist, überführt mindestens eine Gerade in sich. Finden Sie eine fixpunktfreie Isometrie im Poincaré–Modell, die dies nicht erfüllt.
Hinweis: Es gibt ein ganz simples, offensichtliches Modell.