Übungsblatt 1

Geometrie WS 2018/19

einige Lösungsvorschläge für die Rückseite

Aufgabe: Krummes Lineal? Markieren Sie zwei Punkte auf einem Blatt Papier. Zeichnen Sie mithilfe Ihres Lineals eine Linie durch diese zwei Punkte und markieren oder merken Sie sich, wo diese Punkte am Lineal anliegen. Klappen Sie das Lineal um. Legen Sie es an die gezeichnete Linie an, wobei die Punkte wieder genauso anliegen sollen (das geht z.B. ganz gut mit einem transparenten Lineal). Wie kann man nun entscheiden, ob die Linie Teil einer Geraden bzw. das Lineal krumm oder gerade ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Wir erklären: Das Lineal ist genau dann gerade, falls die gezeichnete Linie wieder genau an der Linealkante verläuft.

Dazu müssen wir dem Lineal geometrische Eigenschaften zuschreiben. Wir stellen uns vor, dass das Lineal keine Dicke besitzt und Teil der Ebene ist, wie auch das Papier, auf dem wir zeichnen. Wir nehmen noch an, dass sich die Ebene im Raum befindet und Geraden der Ebene Geraden und Strecken ebenfalls Strecken bleiben, wenn man die Ebene umdreht, so dass ihre Unterseite nach oben zeigt. Außerdem können wir die Ebene so umdrehen, dass zwei gegebene Punkte genau mit dem jeweils ursprünglichen Punkt übereinstimmen.
Kleine Frage am Rande: Welcher Abbildung entspricht dann die Aktion des Umdrehens?

Bezeichne ℓ die Linie, die mit dem Lineal gezeichnet wurde. Zeichne nach dem Umklappen über die Kante, mit welcher gezeichnet wurde, nochmal eine Linie durch die zwei Punkte, die mit ℓ' bezeichnet sei. Dieses Umklappen kann mit den gemachten Voraussetzungen durch dem Umdrehen der Ebene, deren Teil das Lineal ist, realisiert werden.

Angenommen ℓ wäre ein Geradenstück. Da ℓ' aus der Linie ℓ durch Umdrehen der Ebene hervorgeht, wäre ℓ' ebenfalls Stück einer Geraden, die die beiden Punkte verbindet. Wegen der Eindeutigkeit einer solchen Geraden muss dann $\ell = \ell'$ sein.

Sei umgekehrt $\ell = \ell'$. Eine beliebiger Punkt auf ℓ geht dann nach Umklappen in sich selbst über. Angenommen ℓ wäre kein Geradenstück. Dann muss es zwei Punkte A, B auf ℓ geben, deren Strecke nicht mit dem Stück der Linie ℓ, die die Punkte verbindet, übereinstimmt. Da das Lineal und auch das umgeklappte Lineal an A und B anliegt, betrachte ich diese statt der ursprünglichen. Aus $\ell = \ell'$ folgt, dass Lineal und umgeklapptes Lineal nahtlos aneinanderstoßen. Dann muss die Strecke AB, teilweise im Innern des Lineals oder im Innern des umgeklappten Lineals verlaufen (natürlich ist auch beides möglich). Nach Um-bzw. Zurückklappen erhielte man unter dieser Annahme eine zweite Linie $g' \neq AB$, die A und B verbindet. Diese geht aus AB durch Umdrehen der Ebene hervor. Also wäre g' eine Strecke und da die Punkte A und B auf sich dabei übergehen, wäre $g' = AB$ wegen des Inzidenzaxioms und wir erhalten einen Widerspruch.

Aufgabe: Sei eine Inzidenzgeometrie $\mathcal{G}$ auf einer Menge $\mathcal{E}$ gegeben, die das Parallelenaxiom erfülle: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt, der nicht auf ihr liegt, gibt es höchstens(!) eine Gerade durch diesen Punkt, die die Gerade g nicht schneidet, d.h. **parallel** dazu ist. Zeigen Sie: ist g parallel zu h und h parallel zu k, so ist g auch parallel zu k oder gleich. Gilt dies auch ohne das Parallelenaxiom? Probieren Sie mit Inzidenzgeometrien auf einer 5–elementigen Menge.

Lösung: Angenommen g wäre nicht parallel zu k und auch nicht $g = k$. Dann schneiden sich g und k in genau einem Punkt P. Da beide Geraden parallel zu h sind erhalten wir zwei verschiedene Parallelen zu h durch P im Widerspruch zum Parallelenaxiom.

Nein, ohne Parallenaxiom gilt das nicht: Nimmt man die Menge $\mathcal{E} = \{A; B; C; D; E\}$ und $\mathcal{G}$ bestehe aus allen zwei-elementigen Teilmengen, so sind für die Gerade $h = \{A; B\}$, $g = \{C; D\}$ und $k = \{C; E\}$ g parallel zu h und h parallel zu k aber g nicht parallel zu k.

Aufgabe: Bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge der Geraden. Zeigen Sie, dass durch folgende Definition auf $\mathcal{G}$ eine Inzidenzgeometrie gegeben ist: jeder Punkt $P \in E$ bestimme eine "Gerade", die aus allen Elementen von $\mathcal{G}$ besteht, die P enthalten. Weiterhin bestimme jedes Element aus $\mathcal{G}$ eine "Gerade", die aus dem Element selbst und allen Elementen von $\mathcal{G}$ besteht, die parallel dazu sind, es sei denn, dass diese Gerade gar keine Parallelen besitzt.

Lösung: Zeichnen Sie eine Skizze der beiden möglichen Arten von Geraden. Seien nun $g, h \in \mathcal{G}$. Sind diese nicht (in der alten Geometrie) parallel, so schneiden Sie sich in einem Punkt P. Folglich sind sie enthalten in der Menge aller "alten" Geraden, die P enthalten, was einer "neuen" Geraden entspricht. Sind sie hingegen parallel, so sind sie in der Menge aller Geraden enthalten, die parallel zu einer (und damit auch zur anderen Geraden) sind. Auch dies entsprich einer "neuen" Geraden. Jede der neuen Geraden enthält zwei Punkte ("alte" Geraden) - im Falle der parallelen Schar ist das so vorausgesetzt, im Falle der Menge, die durch einen Punkt P geht, gibt es mindestens zwei Punkte Q, R, so dass P, Q, R nicht auf einer Geraden liegen. Folglich enthält die Menge der "alten" Geraden, die durch P geht, zwei verschiedene "alte" Geraden, nämlich $G(P, Q)$ und $G(P, R)$. Betrachtet man noch $G(Q, R)$, so erhält man drei "alte" Geraden, die weder durch einen Punkt gehen (unter Benutzung von Satz 1), noch parallel sind (nach Voraussetzung schneiden sie sich ja). Also sind sie in der neuen Geometrie nicht kolinear.

Aufgabe: Kann es in dieser Inzidenzgeometrie Parallelen geben? Studieren Sie diese Frage zunächst für $\mathbb{R}^2$ mit den affinen Geraden (siehe Vorlesung). Betrachten Sie dann die aus fünf Punkten bestehende Ebene $\mathcal{E} := \{A; B; C; D; E\}$ mit Inzidenzgeometrie
$\mathcal{G} := \{\{A; B\}; \{B; C\}; \{C; D\}; \{D; A\}; \{A; E; C\}; \{B; E; D\}\}$. Finden Sie in der oben beschriebenen Inzidenzgeometrie auf der Menge $\mathcal{G}$ ein paralleles Geradenpaar.

Lösung: Startet man mit der kartesischen Ebene als "alte" Geometrie so erkennt man leicht, dass sich die Menge der Geraden durch einen Punkt mit der Menge der Geraden durch einen anderen Punkt in genau einem Punkt, nämlich der Geraden durch diese beiden Punkte schneiden. Betrachtet man eine Menge von geraden durch einen gegebenen Punkt und eine Menge von Geraden, die parallel zu einer gegebenen Geraden sind, so schneiden diese sich in der Parallelen zu der gegebenen Geraden, die durch den gegebenen Punkt verläuft. Also gibt es zur Geraden der ersten Art (Menge von Geraden durch gegebenen Punkt) keine Parallelen. Zur Geraden zweiter Art hingegen (Menge von Geraden, parallel zu gegebener Gerade) ist jede solche "neue" Gerade, die aus "alten" Geraden besteht, die parallel zu einer Geraden sind, die nicht parallel zu vorigen gegebenen Geraden ist, disjunkt zur vorigen "neuen" Geraden und damit parallel.

Auf $\mathcal{G} := \{\{A; B\}; \{B; C\}; \{C; D\}; \{D; A\}; \{A; E; C\}; \{B; E; D\}\}$ ist das Geradenpaar $\{\{A; B\}; \{C; D\}\}$ und $\{\{A; D\}; \{B; C\}\}$ "neuer Geraden" bestehend aus parallelen "alten Geraden" parallel.

Aufgabe: Überprüfen Sie die Axiome der Inzidenz für Punkte und Geraden in der Ebene, wenn die Ebene $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist und die kartesischen Kreise und Geraden, die durch die 0 gehen (der Durchschnitt dieser mit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$) die Menge der Geraden bilden. Sie dürfen dabei natürlich alles Wissen um Kreise und Geraden in $\mathbb{R}^2$, benutzen. Bestimmen Sie alle Parallelen zu einer beliebigen Geraden und einem Punkt außerhalb dieser.

Lösung: Man benutze folgenden Fakt, der aus der Umkreiskonstruktion für euklidische Dreiecke folgt (der Dreiecke, die in der Schule studiert werden): Je drei verschiedene Punkte der kartesischen Ebene liegen entweder auf einer Geraden oder auf genau einem Kreis. Seien nun $A, B \in \mathcal{E}$. Liegen A, B, O ($O = (0,0)$ ist der Ursprung) auf einer Geraden, so liegen A, B auf einer Geraden durch O (die ist natürlich auch eindeutig). Liegen A, B, O nicht auf einer Geraden, so liegen sie auf genau einem Kreis durch O, nämlich dem Umkreis von $\Delta(A, B, O)$. Jede Gerade und jeder Kreis in der kartesischen Ebene enthält unendlich viele Punkte. Zieht man einen davon ab, nämlich O, so sind es immer noch unendlich viele Punkte. Schließlich starten wir mit einer Geraden durch O und wählen zwei verschiedene Punkte, A, B auf ihr. Dann wählen wir C, nicht auf dieser Geraden. A, B, C, O liegen dann weder auf einer Geraden noch auf einem Kreis (siehe Diskussion eingangs), also liegen A, B, C weder auf einer Geraden durch O noch auf einem Kreis durch O, sind also in der bezeichneten Geometrie kolinear.

Sei g eine Gerade der kartesischen Ebene durch O und $P \notin g$. Es gibt genau einen Kreis durch P, der tangential an g ist: dessen Mittelpunkt M ist durch die Senkrechte in O zu g und die Mittelsenkrechte von OP bestimmt, der Radius ist dann $|MP|$ (Warum? Schulwissen und sptere Übungen). Der Kreis schneidet dann die Gerade genau in O, also schneiden sich die entsprechenden Geraden in der Geometrie auf $\mathcal{E}$ nicht.

Versuchen Sie sich nun an der Situation, in der eine Parallele durch einen Punkt P zu einer Geraden gesucht wird, die durch einen Kreis durch O gegeben ist, der P nicht enthält. Hier ist eine Fallunterscheidung nötig!

Aufgabe: Eingerosteter Zirkel. Halbieren Sie eine Strecke mithilfe eines Lineals (ohne Skalierung) und eines eingerosteten Zirkels. Die Strecke ist dabei mehr als doppelt so groß wie die Spannweite des Zirkels. Begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion.
Hinweis: Diese Aufgabe beruht auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule und darf mit diesen gelöst und begründet werden.

Lösung: Man verbinde zuerst die beiden Punkte A und B mit einer Geraden. Dann trage man mithilfe des Zirkels von beiden Punkten Strecken derselben Länge ab. Das wiederhole man so lange, bis die Kreise in den beiden zuletzt abgetragenen Punkten (mit Radius immer noch durch dieselbe Zirkelspanne gegeben) sich schneiden. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte ist die Mittelsenkrechte der Strecke CD zwischen diesen letzten beiden Punkten. Da die Strecken AC und BD zwischen diesen und den Ausgangspunkten dieselbe Länge haben, ist der Mittelpunkt der Strecke CD auch der gesuchte Mittelpunkt der Strecke AB.