Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 07.11.2017

Wenn nichts Anderes geschrieben steht, sind alle Aussagen zu begründen und insbesondere aus Aussagen der Vorlesung und den Übungen herzuleiten.

Aufgabe 1 (4+1+1 Punkte)
(a) Zeigen Sie die folgende Behauptung aus der Vorlesung: ist $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $|T(x) - T(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so ist entweder $T(x) = x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ oder $T(x) = -x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
(b) Zeigen Sie weiterhin, dass es für zwei verschiedene Punkte A, B in einer Geometrie mit Inzidenz- und Abstandsaxiom genau eine Koordinate $\varphi : G(A, B) \to \mathbb{R}$ gibt, für die $\varphi(A) = 0$ und $\varphi(B) > 0$ ist.
(c) In einer Ebene gelten Inzidenz- und Abstandsaxiom. Zeigen Sie für beliebige zwei Punkte A und B der Ebene die Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes der Strecke AB.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte)
Sei eine Ebene gegeben, die das Inzidenz- , das Abstands- sowie das Trennungsaxiom erfüllt.
(a) Zeigen Sie, dass der (endliche) Durchschnitt konvexer Teilmengen der Ebene wieder eine konvexe Teilmenge ist.
(b) Sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass das Komplement von n Geraden die disjunkte Vereinigung von endlich vielen konvexen Teilmengen mit der folgenden Eigenschaft ist: liegen zwei Punkte in verschiedenen dieser Teilmengen, so schneidet die Strecke zwischen ihnen mindestens eine der Geraden.
Hinweis: Betrachten Sie die Situationen zweier sich schneidender Geraden und dreier sich paarweise schneidender Geraden. Das Innere des Winkels bzw. das Innere des Dreiecks sind spezielle Beispiele solcher konvexer Teilmengen. Diese können nun allgemein ganz ähnlich definiert werden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Wieviele Teilmengen können dies bei Aufgabe 2 (b) maximal sein? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Finden Sie eine möglichst kleine Menge von Geraden und eine möglichst große endliche Menge von Geraden in der kartesischen Ebene, so dass deren Komplement die Vereinigung von genau sechs konvexen Mengen im Sinne von Aufgabe 2 (b) ist.
Zusatz: Gibt es für die Zahl dazwischen eine Menge von Geraden mit dieser Eigenschaft? Begründen Sie.

Hinweis: Aufgaben 3 und 4 und die Aufgaben der Rückseite sollen Ihre Intuition für Inzidenz und Lageverhältnisse schärfen. Die Begründung kann durch Skizzen unterstützt werden und Sie sollen dann **kurz** erläutern, warum Ihre Skizzen korrekt sind und alle Möglichkeiten erfassen.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 30.10.-01.11. besprochen werden:

a) Was besagen das Längenaxiom und das Trennungsaxiom?

b) Wir betrachten die Ebene $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ mit der Menge $\mathcal{G}$ der kartesischen Geraden. Zeigen Sie, dass der folgende Abstand d das Abstandsaxiom erfüllt: für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|.$$

Zeigen Sie, dass man damit dieselben Strecken erhält. Folgern Sie das Trennungsaxiom unter der Annahme, dass es mit der euklidischen Metrik gilt.

c) In einer Ebene gelten Inzidenz- und Abstandsaxiom. Begründen Sie die Korrektheit folgender "Axiome der Zwischenrelation" für Punkte A, B, C auf einer Geraden :
(i) Liegt B zwischen A und C, so liegt B auch zwischen C und A.
(ii) Für je zwei Punkte A und B gibt es einen Punkt C verschieden von B, so dass B zwischen A und C liegt.
(iii) Von drei verschiedenen Punkten A, B, C gibt es genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

d) In einer Ebene gelten Inzidenz- und Abstandsaxiom. Zeigen Sie, dass es durch jeden Punkt unendlich viele Geraden gibt, die durch diesen verlaufen.

e) In einer Ebene gelten Inzidenz-, Abstands-, und Trennungsaxiom. Ein Streckenzug ist gegeben durch eine endliche Folge $A_1, A_2, ..., A_n$ von Punkten, wobei A_k verschieden von A_{k+1} ist. Er heiße konvex, falls für alle Geraden $G(A_k, A_{k+1})$ alle A_ℓ mit $\ell \neq k, k+1$ auf derselben Seite dieser Geraden liegen. Kann sich so ein Streckenzug selbst schneiden, d.h. $A_jA_{j+1} \cap A_kA_{k+1} \neq \emptyset$ für ein Paar (j, k) mit $j - k \geq 2$?

f) Ein geschlossener Streckenzug ist ein Streckenzug $A_1A_2...A_nA_1$, d.h. mit $A_1 = A_{n+1}$ $(n \geq 3)$. Schneidet sich dieser nicht selbst (außer $A_1 = A_{n+1}$), so nennen wir ihn n–Eck. Wir nennen das n-Eck konvex, wenn es der Streckenzug ist. Die Strecken des Streckenzugs heißen Seiten, die Strecken zwischen nicht benachbarten Eckpunkten heißen Diagonalen.
(i) Zeigen Sie, dass alle Dreiecke konvex sind.
(ii) Zeigen Sie, dass Diagonalen im Viereck, dessen Seiten nicht im Inneren schneiden. Weisen Sie durch Beispiele nach, dass dies nicht korrekt für Fünfecke ist (Skizze genügt).
(iii) Zeigen Sie, dass ein Viereck genau dann konvex ist, wenn sich die beiden Diagonalen schneiden. Weisen Sie durch Beispiele nach, dass sich in konvexen n-Ecken im Allgemeinen die Diagonalen nicht schneiden.

g) Wieviele Schnittpunkte haben die Diagonalen eines beliebigen konvexen 5-Ecks in $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antworten.

h) Welche Anzahl von solchen Schnittpunkten kann es in einem konvexen 6–Eck maximal geben? Erläutern Sie anhand einer Skizze, dass diese Zahl tatsächlich angenommen wird. Können Sie die Frage für n–Ecke und beliebiges $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ beantworten?

Die folgenden Aufgaben dienen der Wiederholung und beruhen auf einfachen Kenntnissen der Geometrie aus der Schule:

- Formulieren Sie den Satz des Thales. Skizzieren Sie den Beweis.
- (*) Können Sie eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal der Senkrechten in einem Punkt auf der Geraden oder des Lotes von einem Punkt auf die Gerade mit nur drei Schritten angeben (1 Schritt entspricht einem konstruierten Objekt, d.h. Gerade, Strahl, Kreis etc.)? Die Auswahl eines Punktes (beliebig, auf einer Geraden, aus der Menge von zwei Schnittpunkten usw.) ist kein Konstruktionsschritt. Begründen Sie die Konstruktion. (aus der App "Euclidea" 2.6 und 2.7)
- Was ist der In- bzw. Umkreis eines Dreiecks? Wie konstruieren Sie diese mit Zirkel und Lineal und wie begründen Sie die Korrektheit der Konstruktion? Notieren Sie Ihr heutiges Wissen und vergleichen Sie es zu gegebenem Zeitpunkt mit den Diskussionen dazu später im Semester. Überlegen Sie sich, wie daraus folgt, dass drei (verschiedene) Punkte entweder auf einer Geraden liegen oder es genau einen Kreis gibt, auf dem sie liegen (vgl. Aufgabe 7 der Rckseite von Blatt 1)