Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschlag für Aufgabe 1

Wenn nichts Anderes geschrieben steht, sind alle Aussagen zu begründen und insbesondere aus Aussagen der Vorlesung und den Übungen herzuleiten.

Aufgabe 1 (4+1+1 Punkte)
(a) Zeigen Sie die folgende Behauptung aus der Vorlesung: ist $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $|T(x) - T(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so ist entweder $T(x) = x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ oder $T(x) = -x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.
(b) Zeigen Sie weiterhin, dass es für zwei verschiedene Punkte A, B in einer Geometrie mit Inzidenz- und Abstandsaxiom genau eine Koordinate $\varphi : G(A, B) \to \mathbb{R}$ gibt, für die $\varphi(A) = 0$ und $\varphi(B) > 0$ ist.
(c) In einer Ebene gelten Inzidenz- und Abstandsaxiom. Zeigen Sie für beliebige zwei Punkte A und B der Ebene die Existenz und Eindeutigkeit des Mittelpunktes der Strecke AB.

Lösung: (a) Wir definieren $T_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$T_0(x) = T(x) - T(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|T_0(x) - T_0(y)| = |T(x) - T(0) - T(y) + T(0)| = |T(x) - T(y)| = |x - y|,$$

und $T_0(0) = 0$. Daraus folgt mit $y = 0$

$$|T_0(x)| = |x|.$$

Insbesondere ist $T_0(1) = \pm 1$. Sei $T_0(1) = -1$. Angenommen für ein $x \neq 1$ wäre $T_0(x) = x$. Dann folgt

$$|T_0(x) - T_0(1)| = |x + 1| = |x - 1|.$$

Diese Gleichung hat als einzige Lösung $x = 0$. Das kann man graphisch begründen oder indem man die Betragsstriche mit Fallunterscheidungen auflöst. Da $-0 = 0$ folgt für alle x, dass $T_0(x) = -x$. Dafür ist die Gleichung tatsächlich erfüllt. Insgesamt folgt dann, dass die Funktion die Form $T(x) = -x + c$ für eine Konstante $c (= T(0))$ hat.

Analog folgt für $T_0(1) = 1$, dass T die Form $T(x) = x + c$ für eine Konstamte c.

Alternative Lösung: Man könnte man die Gleichungen mit Beträgen auch quadrieren und würde unter Ausnutzung von $T_0(x)^2 = x^2$ deutlich schneller auf das Ergebnis kommen. Um das zu demonstrieren betrachten wir die Gleichung $|x + 1| = |x - 1|$, deren Lösung oben nicht hergeleitet wurde. Nach Quadrieren ergibt sich

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

und nach elementarer Umformung $x = 0$. Die Tatsache $|z|^2 = z^2$ für jede **reelle** Zahl z benutze ich kommentarlos.

Darauf kommt aber vielleicht nicht jeder. Hingegen sollte jeder von Ihnen wissen, wie man Gleichungen mit Beträgen löst...

(b) Angenommen, ψ ist eine weitere Koordinate. Wie schon in der Vorlesung bemerkt, wäre dann $T := \varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $|T(x) - T(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Aus der Bedingung an die Koordinaten folgt $\psi^0 = \varphi^{-1}(0) = A$, also $T(0) = 0$. Dann ist $T(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $T(x) = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $T(\psi(B)) = \varphi(\psi^{-1}(\psi(B))) = \varphi(B) > 0$ und $\psi(B) > 0$ folgt $T(x) = x$ und somit $\varphi \circ \psi^{-1} = id$ also $\varphi = \psi$.

(c) Für $A = B$ ist die Behauptung offensichtlich (das kann auch als ausgeschlossen angenommen werden). Ist $A \neq B$ wähle eine Koordinate $\varphi : G(A, B) \to \mathbb{R}$ so dass $\varphi(A) = 0$ und $\varphi(B) > 0$. Die Forderung $|AM| = |AB|/2$ ergibt zwingend $\varphi(M) = |AB|/2 = \varphi(B)/2$ und mit der Bijektivität von φ folgt notwenidigerweise die Bedingung $M := \varphi^{-1}(\frac{\varphi(B)}{2}) \in AB$. Da $\frac{\varphi(B)}{2} \in [0, \varphi(B)]$ ist $M := \varphi^{-1}(\frac{\varphi(B)}{2}) \in AB$. Außerdem ist $|AM| = |\varphi(A) - \varphi(M)| = \frac{\varphi(B)}{2} = |\varphi(M) - \varphi(B)| = |MB|$ und M ist tatsächlich der Mittelpunkt der Strecke.