Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Geometrie WS 2018/19

einige Lösungsvorschläge für die Rückseite

Aufgabe: In einer Ebene gelten Inzidenz- und Abstandsaxiom. Begründen Sie die Korrektheit folgender "Axiome der Zwischenrelation" für Punkte A, B, C auf einer Geraden:
(i) Liegt B zwischen A und C, so liegt B auch zwischen C und A.
(ii) Für je zwei Punkte A und B gibt es einen Punkt C verschieden von B, so dass B zwischen A und C liegt.
(iii) Von drei verschiedenen Punkten A, B, C gibt es genau einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Lösung: Wir wählen iregndeine Koordinate φ auf der Geraden. Dann können die reellen Zahlen $\varphi(A), \varphi(B)$ und $\varphi(C)$ dert Größe nach geordnet werden. Die Zwischenrelation ist durch eine entsprechende Relation auf den reellen Zahlen definiert. y liegt zwischen x und z, wenn y nach Ordnung die mittlere Zahl ist. Die Behauptungen sind nun offensichtlich, wenn wir voraussetzen, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe: In einer Ebene gelten Inzidenz- und Abstandsaxiom. Zeigen Sie, dass es durch jeden Punkt unendlich viele Geraden gibt, die durch diesen verlaufen.

Lösung: Sei P der Punkt und g eine Gerade, auf der P nicht liegt (siehe Übungsblatt 1). g enthält unendlich viele Punkte. Für $Q, R \in g$ verschieden, sind die Geraden $G(P, Q)$ und $G(P, R)$ verschieden, da sonst alle drei Punkte auf einer Geraden liegen müssten im Widerspruch zur Voraussetzung an P und g. Also ist die Familie von Geraden $\{G(P, Q) \mid Q \in g\}$ eine Familie paarweise verschiedener Garaden. (Wenn Sie Folgen lieber mögen, können Sie auch eine unendliche Folge paarweise verschiedener Punkte auf g wählen und damit eine unendliche Folge paarweise verschiedener Geraden definieren).

Aufgabe: In einer Ebene gelten Inzidenz-, Abstands-, und Trennungsaxiom. Ein Streckenzug ist gegeben durch eine endliche Folge $A_1, A_2, ..., A_n$ von Punkten, wobei A_k verschieden von A_{k+1} ist. Er heiße konvex, falls für alle Geraden $G(A_k, A_{k+1})$ alle A_ℓ mit $\ell \neq k, k+1$ auf derselben Seite dieser Geraden liegen. Kann sich so ein Streckenzug selbst schneiden, d.h. $A_jA_{j+1} \cap A_kA_{k+1} \neq \emptyset$ für ein Paar (j, k) mit $j - k \geq 2$?

Lösung: Schneiden sich $A_jA_{j+1} \cap A_kA_{k+1}$ in genau einem inneren Punkt von A_jA_{j+1}, so liegen A_j und A_{j+1} auf verschiedenen Seiten von $G(A_k, A_{k+1}$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Konvexitätsbedingung. Andererseits verbietet die Bedingung, dass ein Eckpunkt A_j oder A_{j+1} genau auf der Seite A_kA_{k+1} liegt. Also kann es so einen Selbstschnitt nicht geben.
Anmerkung: Weicht man die Bedingung auf und fordert nur, dass sie nicht auf verschiedenen Seiten liegen, lässt also insbesondere zu, dass die Eckpunkte auf anderen Strecken liegen, ist die Aussag enicht mehr richtig: Man kann dann z.B. die Seiten eines Dreiecks mehrfach durchlaufen - und sogar in beide Richtungen. Vor allem Letzteres würde man nicht als konvex bezeichnen wollen.

Aufgabe: Ein geschlossener Streckenzug ist ein Streckenzug $A_1A_2...A_nA_1$, d.h. mit $A_1 = A_{n+1}$ ($n \geq 3$). Schneidet sich dieser nicht selbst (außer $A_1 = A_{n+1}$), so nennen wir ihn n–Eck. Wir nennen das n-Eck konvex, wenn es der Streckenzug ist. Die Strecken des Streckenzugs heißen Seiten, die Strecken zwischen nicht benachbarten Eckpunkten heißen Diagonalen.
(i) Zeigen Sie, dass alle Dreiecke konvex sind.
(ii) Zeigen Sie, dass Diagonalen im Viereck, dessen Seiten nicht im Inneren schneiden. Weisen Sie durch Beispiele nach, dass dies nicht korrekt für Fünfecke ist (Skizze genügt).
(iii) Zeigen Sie, dass ein Viereck genau dann konvex ist, wenn sich die beiden Diagonalen schneiden. Weisen Sie durch Beispiele nach, dass sich in konvexen n-Ecken im Allgemeinen die Diagonalen nicht schneiden.

Lösung: Zu (i) Das ist offensichtlich, da es nur einen verbleibenden Eckpunkt gibt und dieser auchnicht auf der Seitengeraden liegt, da die Eckpunkte eines Dreiecks nicht kolinear sein sollen,
Zu (ii) Die Diagonalen bilden mit jedem der verbleibenden Eckpunkte ein Dreieck. Die Endpunkte der Digonalen und ein weiterer Eckpunkt sind insbesondere nicht kolinear, nach Voraussetzung. Für das Gegenbeispiel starte man mit einem konvexen Voereck $ABCD$ und wähle den fünften Punkt im "Inneren", d.h. so dass sich ED und die Diagonale AC im Inneren schneiden.
Zu (iii) Angenommen, im Viereck $ABCD$ schneiden sich die Diagonalen in einem Punkt P. Dann liegen C und D auf derselben Seite von $G(A, B)$ wie P. Dasselbe kann man mit den drei anderen Seitengeraden nutzen und es folgt die Konvexität des Vierecks. Ist das Viereck andererseits konvex, im Schnitt der Halbebenen bzgl. der Seitengeraden, die die anderen beiden Punkte enthalten. Man kann nun Satz 7 (Pasch) anwenden, um zu zeigen, dass die Diagonalen sich schneiden. Z.B. folgt aus der Folgerung von Satz 5 und Satz 7 der Vorlesung, dass der Strahl in A durch C die Strecke BD und der Strahl in B durch D die Strecke AC im Inneren schneidet und die Behauptung folgt. Im konvexen 6–Eck gibt es Diagonalen, die sich überhaupt nicht schneiden, im konvexen Fünfeck schneiden sich gewisse Diagonalen nicht im Inneren.

Aufgabe: Wieviele Schnittpunkte haben die Diagonalen eines beliebigen konvexen 5-Ecks in $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung: Zunächst stellt man fest, dass für jede Diagonale im konvexen Fünfeck, zwei der verbliebenen Eckpunkte auf einer und einer auf der anderen Seite liegen. Versuchen Sie, das zu begründen. Daraus ergeben sich für jede Diagonale genau zwei Schnittpunkte mit anderen Diagonalen. Zählt man so für jeden Eckpunkt, hat man jeden Schnittpunkt zweimal aufgelistet. Das bedeutet, dass es immer(!) $5 * 2/2 = 5$ Schnittpunkt von Diagonalen gibt.

Aufgabe: Welche Anzahl von solchen Schnittpunkten kann es in einem konvexen 6–Eck maximal geben? Erläutern Sie anhand einer Skizze, dass diese Zahl tatsächlich angenommen wird. Können Sie die Frage für n–Ecke und beliebiges $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ beantworten?

Lösung: Wenn man annimmt, dass sich keine drei Diagonalen in einem Punkt schneiden, ergibt sich folgende Zählung: Es gibt 6 Digonalen, so dass auf einer Seite einer und der anderen 3 der verbliebenen Eckpunkte liegen. Jede dieser ist folglich an 3 Schnittpunkten beteiligt. Die 3 Diagonalen mit jeweils 2 der verbliebenen Eckpunkte auf einer Seite sind an 4 Schnittpunkten beteiligt. Jeder Schnittpunkt wird wieder zweimal dabei gezählt, also gibt es $(6 * 3 + 3 * 4)/2 = 15$ Schnittpunkte.

Versuchen Sie, die allgemeine Formel induktiv herzuleiten. Der Weg ist hier interessanter als das Ergebnis.