Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 14.11.2018

Aufgabe 1 (4 + 5 Punkte)
Es gelten das Inzidenzaxiom, das Abstandsaxiom und das Trennungsaxiom.
(a) Zeigen Sie für ein beliebiges Dreieck, dass es für jeden Punkt P im Inneren zwei Punkte D, E auf den Seiten gibt, so dass P im Inneren der Strecke DE liegt.
Bemerkung: Insbesondere ist die Vereinigung von Innerem und Seiten die konvexe Hülle der drei Eckpunkte.
(b) Zeigen Sie: Eine Gerade geht genau dann durch einen Punkt im Inneren des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$, wenn sie den Rand des Dreiecks genau in zwei Punkten schneidet. Hinweis: Listen Sie alle Möglichkeiten auf, wie eine Gerade den Rand eines Dreiecks schneiden kann: gar nicht, genau in einem Eckpunkt, usw. Untersuchen Sie in jedem dieser Fälle den Schnitt der Geraden mit dem Inneren des Dreiecks.

Ab hier gelten das Inzidenz-, Abstands- , Trennungs- und Winkelmaßaxiom.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Drei Geraden schneiden sich in einem Punkt. Wieviele verschiedene Winkel können maximal dabei gebildet werden (der gestreckte Winkel zählt hier nicht als Winkel). Zwei der Winkel betragen nun 25^o bzw. 55^o. Wie lauten die Größen der anderen Winkel? Bestimmen Sie alle möglichen Antworten.
Hinweis: Es ist nicht festgelegt welche der beiden Winkel gegeben sind!

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Zeigen Sie: Die Winkelhalbierende eines Winkels bildet mit der Winkelhalbierenden seines Nebenwinkels einen rechten Winkel. Begründen Sie zunächst, warum der gemeinsame Schenkel von Winkel und Nebenwinkel im Inneren des Winkels liegt, der durch die beiden Winkelhalbierenden gebildet wird. Wie folgt daraus die Behauptung?

Aufgabe 4 (4 + 5 Punkte)
(a) Was sind Scheitelwinkel? Formulieren und beweisen Sie den Scheitelwinkelsatz.
(b) Beweisen Sie die folgende Umkehrung: Seien h und h' zwei entgegengesetzte Strahlen auf einer Geraden. Seien k und l zwei Strahlen auf verschiedenen Seiten dieser Geraden, so dass $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', l)$. Zeigen Sie, dass dann k und l entgegengesetzte Strahlen auf einer Geraden sind.

Hinweis: Aufgabe 1 und (c) der Rückseite dient der Übung beim Beweisen von Lage- und Schnittverhältnissen unter Ausnutzung des Trennungsaxioms bzw. des Postulates von Pasch. Mit Aufgaben 2 und (d-f) werden einfache Rechnungen mit Winkeln geübt. In Aufgaben 3, 4 und (g-i) führen Sie kleine Beweise einfacher Sachverhalte über Winkel mithilfe der bisher eingeführten Axiome (einschließlich dem Winkelmaßaxiom und Sätzen, die daraus folgen).

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 05.11.–08.11. besprochen werden:

a) Was besagt das Postulat von Pasch (Satz 7 der Vorlesung)?

b) Formulieren Sie das Winkelmaßaxiom. Wie hängen die Winkelmaße eines Winkels und seines Nebenwinkels zusammen?

c) Zeigen Sie, dass aus dem Inzidenzaxiom, dem Abstandsaxiom und dem Postulat von Pasch das Trennungsaxiom folgt.

d) Wie hängen Winkelgrad und Bogenmaß zusammen (Schulwissen)? Was ist das Bogenmaß eines Winkels von 30^o bzw. 60^o? Was ist der Winkelgrad des Winkels mit Bogenmaß $\frac{\pi}{5}$?

e) Zeichnen Sie zwei Geraden, die sich in einem Punkt P schneiden und einen Winkel von 19^o einschließen unter Zuhilfenahme eines Winkelmessers. Zeichnen Sie mit einem Zirkel einen Kreis um P, der beide Geraden je zweimal schneidet. Bestimmen Sie nun nur unter Zuhilfenahme des Zirkels einen Punkt Q auf dem Kreis, so dass die Gerade durch P und Q mit einer der beiden anderen Geraden einen Winkel von 1^o einschließt. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion.

f) An die beiden Schenkel eines Winkels werden jeweils auf die Seite des anderen Schenkels Winkel von 45^o abgetragen. Der Winkel, den die neuen Strahlen bilden betrage 72^o. Wie groß ist der ursprüngliche Winkel? Gibt es mehrere Möglichkeiten? Begründen Sie Ihre Antwort.

g) Was ist ein rechter Winkel und wodurch wird er charaktersiert (Vorlesung)? Beweisen Sie die entsprechende Behauptung aus der Vorlesung.

h) Man falte ein Blatt Papier einmal und dann noch einmal so, dass die Faltline auf sich selbst zu liegen kommt. begründen Sie, dass nach dem Auffalten die zweite Faltlinie eine Gerage ist und beide Geraden senkrecht aufeinander stehen. Hinweis: Vergleichen Sie mit Aufgabe 2 auf Blatt 1.

i) Sei $\mathcal{H}$ eine Halbebene bezüglich einer Geraden g und $O \in g$ ein Punkt. Seien h, k, l und m vier (verschiedene) Strahlen O, die nicht in $\mathcal{H}$ liegen. Seien $\measuredangle(k, l)$ und $\measuredangle(h, m)$ rechte Winkel. Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\measuredangle(h, k)$ und $\measuredangle(l, m)$ übereinstimmen oder einen rechten Winkel bilden. Charakterisieren Sie die Lageverhältnisse der Strahlen, in denen die eine und in denen die andere Aussage eintritt.

j) Seien h, k, l und m vier (verschiedene) Strahlen einer Ebene in einem Punkt O. Seien $\measuredangle(k, l)$ und $\measuredangle(h, m)$ rechte Winkel. Diskutieren Sie unter Ausnutzung der vorigen Aufgabe und der Behauptung von Aufgabe 1 (a), welche möglichen Winkel die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\measuredangle(h, k)$ und $\measuredangle(l, m)$ bilden können. Charakterisieren Sie wieder für jeden dieser Fälle die Lageverhältnisse der Strahlen, in denen dieser eintritt.