Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Geometrie WS 2018/19

einige Lösungsvorschläge für die Rückseite

Aufgabe: Was ist ein rechter Winkel und wodurch wird er charaktersiert (Vorlesung)? Beweisen Sie die entsprechende Behauptung aus der Vorlesung.

Lösung: Ein rechter Winkel ist ein Winkel, dessen Winkelmaß $\frac{\pi}{2}$ beträgt.
Ein Winkel ist genau dann ein rechter Winkel, wenn er kongruent zu seinem Nebenwinkel ist.
Beweis: Seien h, k Strahlen in O, h' der zu h entgegengesetzte Strahl.
Sei $\measuredangle(h, k)$ ein rechter Winkel, d.h. $|\measuredangle(h, k)| = \frac{\pi}{2}$. Dann ist wegen WMA (4) für den Nebenwinkel

$$|\measuredangle(h', k)| = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Folglich ist $\measuredangle(h', k) \cong \measuredangle(h, k)$, also der Winkel kongruent zu seinem Nebenwinkel (Definition der Kongruenz von Winkeln).
Sei umgekehrt $\measuredangle(h', k) \cong \measuredangle(h, k)$. Dann ist $|\measuredangle(h', k)| = |\measuredangle(h, k)|$ (Definition der Kongruenz von Winkeln) und folglich wegen WMA (4)

$$\pi = |\measuredangle(h', k)| + |\measuredangle(h, k)| = 2|\measuredangle(h, k)|$$

also $|\measuredangle(h, k)| = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\measuredangle(h', k)$ ein rechter Winkel.

Aufgabe: Man falte ein Blatt Papier einmal und dann noch einmal so, dass die Faltline auf sich selbst zu liegen kommt. begründen Sie, dass nach dem Auffalten die zweite Faltlinie eine Gerage ist und beide Geraden senkrecht aufeinander stehen. Hinweis: Vergleichen Sie mit Aufgabe 2 auf Blatt 1.

Lösung: Wir wissen schon, dass Faltlinen eine Gerade sind. Durch die zweifache Faltung erhält man also zwei Geraden, die sich schneiden, sagen wir in O. Die vier Winkel, die dabei gebildet werden sind "deckungsgleich" - sie lagen ja genau übereinander. Wir schreiben dem Blatt Papier nun noch die Eigenschaft zu, dass deckungsgleiche Figuren - genauer Strecken, Winkel und Dreiecke - kongruent sind. Dann wären also alle vier Winkel kongruent und folglich jeder Winkel kongruent zu seinem Nebenwinkel. Somit sind alle vier Winkel rechte Winkel.

Aufgabe: Sei $\mathcal{H}$ eine Halbebene bezüglich einer Geraden g und $O \in g$ ein Punkt. Seien h, k, ℓ und m vier (verschiedene) Strahlen O, die nicht in $\mathcal{H}$ liegen. Seien $\measuredangle(k, \ell)$ und $\measuredangle(h, m)$ rechte Winkel. Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\measuredangle(h, k)$ und $\measuredangle(\ell, m)$ übereinstimmen oder einen rechten Winkel bilden. Charakterisieren Sie die Lageverhältnisse der Strahlen, in denen die eine und in denen die andere Aussage eintritt.

Lösung: **Verdeutlichen Sie sich jede der im Folgenden beschriebenen Situationen anhand von einer Skizze!**
Bezeichne n den Strahl in O, der senkrecht auf g steht und auf derselben Seite, wie h, k, ℓ, m
(o) Keine der vier Strahlen stimmt mit n überein, da sonst sei Partner auf g liegen müsset im Widerspruch zur Voraussetzung an die vier Strahlen.
(i) k und ℓ müssen auf verschiedenen Seiten von n liegen. Angenommen, das Gegenteil sei der Fall. Dann liegt entweder k im Inneren von $\measuredangle(n, \ell)$ oder ℓ im Inneren von $\measuredangle(n, k)$. Um das einzusehen, betrachte man drei Punkte $A \in n$, $B \in \ell$ soiwe $C \in k$. Liege k nicht im Inneren von $\measuredangle(h, \ell)$. Dann liegen C und A auf verschiedenen Seiten von ℓ, da sie nach unserer Annahme auf derselben von n liegen und AC schneidet die Gerade, auf der ℓ liegt. Da A und C auf derselben Seite von g wie ℓ liegen, scheidet der Strahl ℓ selbst die Strecke AC und ℓ liegt folgich im Inneren von $\measuredangle(n, k)$. Im Fall $\ell \in \measuredangle(n, k)$ ist wegen Satz 9 $|\measuredangle(k, \ell)| < |\measuredangle(n, k)| < \frac{\pi}{2}$, da n senkrecht auf g steht im Widerspruch zur Voraussetzung $|\measuredangle(k, \ell)| = \frac{\pi}{2}$.
Analog folgt, dass h und m auf verschiedenen Seiten von n liegen.
(ii Mit einem ähnlichen Argument muss genau einer der Strahlen h oder m im Inneren des rechten Winkels $\measuredangle(k, \ell)$ liegen.
(ii) Nun gibt es zwei Fälle: h und k liegen auf derselben Seite von n oder sie liegen auf verschiedenen Seiten. Nehmen wir zunächst den ersten Fall an. Bezeichne der Strahl v die Winkelhalbierende von $\measuredangle(h, k)$ und w die Winkelhalbierende von $\measuredangle(\ell, m)$. Liege h im Inneren von $\measuredangle(k, \ell)$. Dann ist wegen Satz 9 $|\measuredangle(h, \ell)| < \frac{\pi}{2}$ und folglich liegt ℓ im Inneren von $\measuredangle(h, m)$. WMA (4) gibt nun $|\measuredangle(h, k)| = |\measuredangle(\ell, m)|$. Aus der Definition der Winkelhalbierenden folgt $|\measuredangle(h, v)| = |\measuredangle(\ell, w)|$. Weiterhin liegt v im Inneren von $\measuredangle(k, \ell)$ und ℓ im Inneren von $\measuredangle(v, w)$. daraus folgt mit WMA (4): $|\measuredangle(v, w)| = |\measuredangle(v, \ell)| + |\measuredangle(\ell, w)| = |\measuredangle(k, \ell)| - |\measuredangle(v, k)| + |\measuredangle(\ell, w)| = |\measuredangle(k, \ell)| = \frac{\pi}{2}$. Das Argument geht genauso, wenn m im Inneren von $\measuredangle(k, \ell)$ liegt (z.B. durch Vertauschung der Bezeichnungen für h und m).
(iii) Angenommen h und k liegen auf verschiedenen Seiten von n. Eine ähnliche Analyse der Lage der Strahlen zueineinander und Winkelarithmetik zeigen unter Verwendung von WMA (3) (Abtragung), dass $v = w$.

Aufgabe: Seien h, k, l und m vier (verschiedene) Strahlen einer Ebene in einem Punkt O. Seien $\measuredangle(k, l)$ und $\measuredangle(h, m)$ rechte Winkel. Diskutieren Sie unter Ausnutzung der vorigen Aufgabe, welche möglichen Winkel die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\measuredangle(h, k)$ und $\measuredangle(l, m)$ bilden können. Charakterisieren Sie wieder für jeden dieser Fälle die Lageverhältnisse der Strahlen, in denen dieser eintritt.

Lösung: Die Aufgabe wurde auch im letzten Jahr gestellt. Der Vewerweis auf Aufgabe 1(a) stammt auch daher und ist nicht aktuell. Die Argumentation ist angelehnt an die vorige Aufgabe. Durch eventuellen Austausch der gegebenen Strahlen mit ihren Gegenstrahlen, kann man fast die Situation dieser Aufgabe erreichen. Es kann dann allerdings noch sein, dass zwei Strahlen auf einer Geraden liegen. Dieser Fall ist neu zu untersuchen. Im anderen Fall ist zu prüfen, was beim Austausch von Strahlen durch Gegenstrahlen mit der Winkelhalbierenden passiert.