Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 21.11.2018

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS].

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Beweisen Sie den Kongruenzsatz $[WWS]$ für Dreiecke ohne das Parallelenaxiom oder seine Folgerungen, wie beispielsweise den Innenwinkelsatz im Dreieck zu verwenden.
Hinweis für einen möglichen Lösungsweg: Zeigen Sie zuerst, dass das übriggebliebene Paar von Winkeln ebenfalls kongruent ist, indem Sie den entsprechenden Innenwinkel des einen Dreiecks im anderen Dreieck abtragen (siehe Beweis von [WSW] und [SSS] in der Vorlesung). Verwenden Sie den schon bewiesenen Kongruenzsatz [WSW] und den schwachen(!) Außenwinkelsatz.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 6 Punkte)
(a) Wie ist die Mittelsenkrechte m einer Strecke AB definiert.
(b) Begründen Sie (kurz!), warum die Mittelsenkrechte existiert und eindeutig ist.
(c) Zeigen Sie, dass m genau die Menge der Punkte der Ebene ist, die denselben Abstand von A und B haben. Hinweis: Ihr Beweis muss zwei Richtungen enthalten.

Aufgabe 3 (2+2(+3) Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass es in einem Dreieck immer mindestens zwei spitze Winkel geben muss.
(b) Zeigen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck nicht größer als $\frac{3\pi}{2}$ sein kann.
Zusatz: Zeigen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck nicht größer als π sein kann.

Aufgabe 4 (8 Punkte)
Zur Erinnerung: In der Vorlesung wird behauptet, dass man das Lot von einem Punkt P auf eine Gerade g auf der P nicht liegt, wie folgt konstruieren kann. Man wähle einen beliebigen Punkt A auf g und einen der beiden Strahlen in A auf g. Dieser sei mit h bezeichnet. Der Strahl in A durch P sei mit k bezeichnet. Wir konstruieren einen Strahl ℓ in A auf der Seite von g, in der P nicht liegt, so dass $\measuredangle(h, \ell) \cong \measuredangle(h, k)$. Auf ℓ sei Q der Punkt mit $AP \equiv AQ$. Zeigen Sie nun: Die Gerade g' durch P und Q ist die Lotgerade von P auf g.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 12.11.–14.11. besprochen werden:

a) Formulieren Sie das Kongruenzaxiom.

b) Welche Kongruenzsätze für Dreiecke gibt es? Formulieren Sie diese präzise. Wie wendet man sie an? Erläutern Sie das allgemeine Prinzip.

c) Beweisen Sie den Kongruenzsatz [SsW] für Dreiecke.
Hinweis: Seien $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C')$ mit $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle(ACB) \cong \angle(A'C'B')$ sowie $|AB| \geq |BC|$ gegeben. Tragen Sie die dritte Strecke AC geeignet am Dreieck $\Delta(A', B', C')$ ab.
An welcher Stelle geht die spezielle Voraussetzung von $[SsW]$, nämlich $|AB| > |BC|$ ein?.

d) Formulieren Sie den Basiswinkelsatz aus der Vorlesung.

e) Beweisen Sie die Umkehrung des Basiswinkelsatzes (Satz 13) aus der Vorlesung: Sind in einem Dreieck zwei Innenwinkel kongruent, so sind die zugehörigen gegenüberliegenden Seiten kongruent. Welche(n) Kongruenzsa(e)tz(e) verwenden Sie?

f) Es sei eine Strecke AB gegeben. In A sei ein Strahl gegeben, der nicht auf der Geraden $G(A, B)$ liege sowie ein Punkt C darauf. In B werde ein Strahl auf die Seite von $G(A, B)$ konstruiert, die C nicht enthält sowie ein Punkt D darauf, so dass der Winkel $\measuredangle(CAB) \cong \measuredangle(DBA)$ und $AC \cong BD$:
(i) Zeigen Sie, dass sich die Strecke CD und die Strecke AB im Inneren schneiden.
(ii) Beweisen Sie, dass der Schnittpunkt der beiden Strecken der Mittelpunkt von AB ist.
Eine kleine Knobelaufgabe: Sie haben außer Ihrem Stift keine üblichen Zeichengeräte dabei. Was könnten Sie benutzen, um für eine gegebene Strecke den Mittelpunkt zu konstruieren?