Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschläge für die Rückseite

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS].

Aufgabe: Beweisen Sie den Kongruenzsatz [SsW] für Dreiecke.
Hinweis: Seien $\Delta(A,B,C)$ und $\Delta(A',B',C')$ mit $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle(ACB) \cong \angle(A'C'B')$ sowie $|AB| \geq |BC|$ gegeben. Tragen Sie die dritte Strecke AC geeignet am Dreieck $\Delta(A',B',C')$ ab.
An welcher Stelle geht die spezielle Voraussetzung von $[SsW]$, nämlich $|AB| > |BC|$ ein?

Lösung: O.B.d.A. sei $|AC| \leq |A'C'|$. Sei $A'' \in A'C'$ der Punkt mit $|A''C'| = |AC|$. Zu zeigen: $A'' = A'$, denn dann wäre $|A'C'| = |AC|$ und nach [SWS] wären die Dreiecke kongruent. Angenommen $A'' \neq A'$, dann läge A'' im Inneren von $A'C'$. Andererseits ist nach [SWS] $\Delta(A'',B',C') \cong \Delta(A,B,C)$ und folglich $|A''B'| = |AB|$ und Das Dreieck $\Delta(A',B',A'')$ ist somit gleichschenklig und wir erhalten $\measuredangle(C'A'B') \cong \measuredangle(A'A''B')$. Letzterer Winkel ist Außenwinkel vom Dreieck $\Delta(A'',B',C')$ und somit ist $|\measuredangle(A'A''B')| > |\measuredangle(A'C'B')|$ und insgesamt $|\measuredangle(C'A'B')| > |\measuredangle(A'C'B')|$. Da dem größeren Innenwinkel im Dreieck die größere Seite gegenüberliegt, folgt $|BC| = |B'C'| > |A'B'| = |AB|$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe: Es sei eine Strecke AB gegeben. In A sei ein Strahl gegeben, der nicht auf der Geraden $G(A,B)$ liege sowie ein Punkt C darauf. In B werde ein Strahl auf die Seite von $G(A,B)$ konstruiert, die C nicht enthält sowie ein Punkt D darauf, so dass der Winkel $\measuredangle(CAB) \cong \measuredangle(DBA)$ und $AC \cong BD$:
(i) Zeigen Sie, dass sich die Strecke CD und die Strecke AB im Inneren schneiden.
(ii) Beweisen Sie, dass der Schnittpunkt der beiden Strecken der Mittelpunkt von AB ist.
Eine kleine Knobelaufgabe: Sie haben außer Ihrem Stift keine üblichen Zeichengeräte dabei. Was könnten Sie benutzen, um für eine gegebene Strecke den Mittelpunkt zu konstruieren?

Lösung: Zu (i) C und D liegen nach Konstruktion auf verschiedenen Seiten von $G(A,B)$. Also schneidet CD die Gerade in einem Punkt M. Zu zeigen ist, dass M im Inneren von AB liegt, d.h. $M \in AB \setminus \{A;B\}$. Dazu müssen wir $M = A$, $M = B$, $B \in AM \setminus \{M\}$ und $A \in BM \setminus \{M\}$ ausschließen. Die ersten beiden und die letzten beiden Bedingungen gehen durch Vertauschen vin A und B ineinander über, d.h. die Nachweise gehen analog.
Angenommen $M = A$. Dann liegen C, A und D auf einer geraden. (Bild zeichnen!). $\measuredangle(CAB)$ ist dann Außenwinkel vom Dreieck $\Delta(A,B,D)$ und mit dem schwachen Außenwinkelsatz ergäbe sich $|\measuredangle(CAB)| > |\measuredangle(DBA)|$ im Widerspruch zur Konstruktion.
Angenommen $B \in AM \setminus \{M\}$. Dann wären $\measuredangle(DBA)$ Außenwinkel von $\Delta(D,B,M)$ und $\measuredangle(BMD)$ Außenwinkel von $\Delta(A,M,C)$, folglich mit dem schwachen Außenwinkelsatz $|\measuredangle(DBA)| > |\measuredangle(BMD| > |\measuredangle(CAB)|$ im Widerspruch zur Konstruktion. Insgesamt folgt die Behauptung.
Zu (ii) Nun gilt $AC \cong BD$ und $\measuredangle(CAB) \cong \measuredangle(DBA)$ (nach Konstruktion) und $\measuredangle(AMC) \cong \measuredangle(BMD)$ (Scheitelwinkel). Folglich mit Kongruenz [WWS] $\Delta(A,M,C) \cong \Delta(B,M,D)$ woraus schließlich $|AM| = |BM|$ folgt, also ist M der Mittelpunkt.