Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 28.11.2017

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS].

Aufgabe 1 (4+3 Punkte)
(a) Beweisen Sie die folgende Aussage: Schneiden sich in einem Dreieck zwei der drei Mittelsenkrechten der Seiten, so besteht die Schnittmenge aus genau einem Punkt, der auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegt. Dieser Punkt hat von allen drei Eckpunkten des Dreiecks denselben Abstand, ist also insbesondere der Mittelpunkt des Umkreises.
(b) Es gelte zusätzlich das Parallelenaxiom. Zeigen Sie, dass sich dann die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks in genau einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)
Eine Konstruktion der Mittelsenkrechten: Sei AB eine gegebenen Strecke. Seien C, E Punkte auf einer und D ein Punkt auf der anderen Seite der Geraden $G(A, B)$. E und B liegen auf derselben Seite der Geraden $G(A, C)$ und A und C auf derselben Seite von $G(E, B)$. Weiterhin seien $\measuredangle(CAB) \cong \measuredangle(EBA) \cong \measuredangle(DAB)$ und $AC \cong BE \cong AD$. Auf der Rückseite von Übungsblatt 4 wird behauptet, dass sich AB und DE genau im Mittelpunkt M der Strecke AB schneiden. Das dürfen Sie als bewiesen annehmen.
(a) Zeigen Sie, dass sich AE und BC in einem Punkt schneiden. Dieser sei mit P bezeichnet.
(b) Beweisen Sie nun, dass die Gerade $G(P, M)$ durch P und M die Mittelsenkrechte von AB ist.

Aufgabe 3 (5+3 Punkte)
Es seien zwei Dreiecke $\Delta(A, B, C)$ und $\Delta(A', B', C)$ gegeben mit $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$.
(a) Zeigen Sie: Wenn $|\measuredangle(ABC)| > |\measuredangle(A'B'C')|$ ist, dann ist auch $|AC| > |A'C'|$.
(b) Erläutern Sie, wie aus der Gültigkeit von (a) für beliebige Dreiecke mit den geforderten Bedingungen die Umkehrung dieser Aussage folgt.

Aufgabe 4 (1 + 4 (+ 3) Punkte)
(a) Zusätzlich sei das Parallelenaxiom vorausgesetzt. Zeigen Sie das die Summe (der Maße) der Innenwinkel in einem Dreieck π beträgt.
(b) Zeigen Sie die Umkehrung von (a): Es seien alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt. Gilt für alle Dreiecke, dass die Summe (der Maße) der Innenwinkel π beträgt, dann gilt auch das Parallelenaxiom.
Zusatz: Zeigen Sie folgende Behauptung ohne das Parallelenaxiom vorauszusetzen: Gibt es ein Dreieck, dessen Innenwinkelsumme π ist, so gilt das für jedes Dreieck.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 19.11.–22.11. besprochen werden:

a) Wiederholen Sie, wie in der Vorlesung die Dreiecksungleichung bewiesen wurde.

b) Diskutieren Sie den Zusammenhang von Winkelgrößen und Seitenlängen im Dreieck. Beschreiben Sie Spezialfälle des Kongruenzsatzes [SsW] in denen Sie diesen anwenden dürfen, ohne etwas über die Seitenlängen der gegebenen Seiten zu wissen.

c) Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade, sowie die Minimalitätseigenschaft des Lotes, wie sie im Satz vom Lot formuliert wurde. Bemerkung: Der Abstand des Punktes von einer Geraden ist gleich der Länge seines Lotes auf diese.

d) Es gelten alle Axiome inklusive des Parallelen-Axioms. Zeigen Sie den Stufen-, Wechsel- und Gegenwinkelsatz.

e) Gegeben sei ein Winkel $\measuredangle(h,k)$ in O. Die Winkelhalbierende ist der Strahl w im Inneren des Winkels $\measuredangle(h,k)$, für den $\measuredangle(h,w) \cong \measuredangle(k,w)$ ist. Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierende ohne O die Menge aller Punkte im Inneren des Winkels ist, die denselben Abstand zu jeder der Geraden haben, die h bzw. k enthalten. Bleibt die Aussage richtig, wenn man stattdessen den Abstand zu den Strahlen h bzw. k nimmt? Dabei ist der Abstand vom Punkt P zu h gegeben durch $dist(P,h) := \min\{|PQ| \mid Q \in h\}$.

f) Eine Konstruktion der Winkelhalbierenden: Sei $\angle(h,k)$ ein Winkel mit Scheitelpunkt O. Seien A, B zwei verschiedene Punkte auf h und C, D auf k, alle verschieden von O.
(a) Sei $A \in OB$ und $C \in OD$. Zeigen Sie, dass sich die Strecken AD und BC im Inneren des Winkels $\angle(h,k)$ schneiden.
(b) Sei P der Schnittpunkt aus (a). Sei weiterhin $OA \cong OC$ und $OB \cong OD$. Beweisen Sie, dass der Strahl in O durch P die Winkelhalbierende ist.
Hinweis: Die Verwendung des Kongruenzsatzes [SsW] in dieser Aufgabe führt sehr oft zu Fehlern. Für den Beweis wird er nicht unbedingt benötigt.

g) Auf einem Blatt Papier sind zwei gerade Linien (Stücke von Geraden) bis zum Rand des Blattes gezeichnet, die sich (auf dem Papier) nicht schneiden. Sie haben ein Winkelmesser oder ein Geodreieck sowie einem Bleistift zur Verfügung. Wie können Sie auf dem Blatt Papier herausfinden, ob die Geraden sich schneiden (außerhalb des Papiers natürlich) und welches Maß der Winkel in diesem Fall besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

h) Zeichnen Sie mit den genannten Hilfsmitteln die Winkelhalbierende des Winkels, für den Fall, dass sich die Geraden schneiden nur durch Abtragen von Winkeln mithilfe des Winkelmessers und ohne Strecken abzutragen oder Strecken durch Nachmessen zu halbieren. Alle Schritte müssen auf dem Blatt Papier durchführbar sein. Begründen Sie Ihre Konstruktion. Diskutieren Sie Grenzen der Konstruktion.