

Übungsblatt 5

Geometrie WS 2018/19

einige Lösungsvorschläge für die Rückseite

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS].

Aufgabe: Gegeben sei ein Winkel $\angle(h, k)$ in O . Die Winkelhalbierende ist der Strahl w im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$, für den $\angle(h, w) \cong \angle(k, w)$ ist. Zeigen Sie, dass die Winkelhalbierende ohne O die Menge aller Punkte im Inneren des Winkels ist, die denselben Abstand zu jeder der Geraden haben, die h bzw. k enthalten. Bleibt die Aussage richtig, wenn man stattdessen den Abstand zu den Strahlen h bzw. k nimmt? Dabei ist der Abstand vom Punkt P zu h gegeben durch $\text{dist}(P, h) := \min\{|PQ| \mid Q \in h\}$.

Lösung: Die Winkelhalbierende ist der Strahl w im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$, für den $\angle(h, w) \cong \angle(k, w)$ ist. Seien wieder mit \bar{h}, \bar{k} die Geraden, auf denen h bzw. k liegen bezeichnet.

Zu zeigen ist:

$$w \setminus \{O\} = \{P \in \angle(h, k) \mid |PF| = |PG|, F \text{ Lot von } P \text{ auf } \bar{h}, G \text{ Lot von } P \text{ auf } \bar{k}\}$$

Das ist mal wieder eine Gleichheit von Mengen. Wir bezeichnen die Menge auf der rechten Seite mit W .

$w \subset W$: Sei $P \in w \setminus \{O\}$ und F Lot von P auf \bar{h} und G Lot von P auf \bar{k} . Per Definition liegt P automatisch im Inneren des Winkels. Zu zeigen ist also $|PF| = |PG|$.

Es ist $\angle OP = \angle OP$, $\angle(PFO) = \angle(PGO)$ sind beides rechte Winkel sowie $\angle(POF) \cong \angle(POG)$, da $P \in w \setminus \{O\}$, damit w der Strahl in O durch P und w die Winkelhalbierende ist, d.h. $\angle(h, w) \cong \angle(k, w)$. Damit folgt aus dem Kongruenzsatz [WWS], dass die Dreiecke kongruent sind: $\Delta(O, F, P) \cong \Delta(O, G, P)$ und somit $PF \cong PG$.

Hinweis: Sie sollten sich merken, dass man nicht den Kongruenzsatz [WSW] für die Kongruenz braucht. Die Kongruenz des dritten Winkelpaares würde ohne Kongruenzsätze nur folgen, wenn man anwendet, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck π ist und dafür wird das Parallelenaxiom benötigt. Das ist aber hier nicht vorausgesetzt. Das führt ggf. zu Punkteabzügen.

$W \subset w$: Sei also $P \in \angle(h, k)$ ein Punkt im Inneren mit $|PF| = |PG|$. Wir zeigen zunächst, dass dann die Fußpunkte $F \in h$ und $G \in k$, d.h. dass sie auf den Strahlen liegen. Angenommen $F \notin h$. Ist $F = O$, so ist $\angle(h, k)$ selbst ein rechter Winkel und $P \in k$ im Widerspruch zur Voraussetzung $P \in \angle(h, k)$. Dann liegt F insbesondere nicht im Inneren des Winkels und auch nicht auf den Strahlen h und k . Dann muss das Innere von PF h oder k schneiden. Da $F \in \bar{h}$ und $PF \not\subset \bar{h}$ folgt, dass PF k in einem Punkt schneidet, der mit F' bezeichnet sei. Da PG das Lot von P auf \bar{k} ist gilt $|PF'| \geq |PG|$. Andererseits ist $|PF| > |PF'|$, da F' im Inneren von PF liegt. Insgesamt also $|PF| > |PG|$ und wir erhalten einen Widerspruch. Analog erhält man einen Widerspruch zu $G \notin k$. Insgesamt folgt also $F \in h, G \in k$.

Nun ist wieder $\angle OP = \angle OP$, $\angle(PFO) \cong \angle(PGO)$ sind rechte Winkel und $|PF| = |PG|$ nach Voraussetzung, $P \in W$. Da der Winkel in F ein rechter Winkel ist, müssen die anderen beiden Winkel, also insbesondere $\angle(POF)$ spitz sein. Da dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, folgt $|PO| > |PF|$ und die Voraussetzungen des Kongruenzsatzes [SsW] sind erfüllt. Daraus folgt $\Delta(OPF) \cong \Delta(OPG)$ und somit $|\angle(POF)| = |\angle(POG)|$ und somit $P \in w$.

Hinweis: In einer Klausur wäre $\angle(h, k)$ als spitz vorausgesetzt und es gäbe eine Teilaufgabe: "Sei P ein beliebiger Punkt P im Inneren des Winkels und F der Fußpunkt seines Lotes h und G der Fußpunkt seines Lotes auf k . Zeigen Sie $F \in h$ und $G \in k$.

Dafür wird $|PF| = |PG|$ nicht benötigt. In dieser Situation kann man wie folgt argumentieren: Sei $F \in \bar{h} \setminus h$. $F \neq O$, da der Winkel $|\angle(OP, h)| < |\angle(h, k)| < \frac{\pi}{2}$, also kein rechter Winkel ist. Dann hat das Dreieck $\Delta(F, O, P)$ einen stumpfen Winkel in O (der Nebenwinkel des spitzen Winkels $\angle(h, k)$). Das ist dann der größte Winkel in diesem Dreieck, da jedes Dreieck mindestens zwei spitze Winkel besitzt. Somit kann in F kein rechter Winkel vorliegen und damit F nicht der Fußpunkt des Lotes von P auf \bar{h} sein.

Aufgabe: Eine Konstruktion der Winkelhalbierenden: Sei $\angle(h, k)$ ein Winkel mit Scheitelpunkt O . Seien A, B zwei verschiedene Punkte auf h und C, D auf k , alle verschieden von O .

(a) Sei $A \in OB$ und $C \in OD$. Zeigen Sie, dass sich die Strecken AD und BC im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$ schneiden.

(b) Sei P der Schnittpunkt aus (a). Sei weiterhin $OA \cong OC$ und $OB \cong OD$. Beweisen Sie, dass der Strahl in O durch P die Winkelhalbierende ist.

Hinweis: Die Verwendung des Kongruenzsatzes [SsW] in dieser Aufgabe führt sehr oft zu Fehlern. Für den Beweis wird er nicht unbedingt benötigt.

Lösung: Zu (a): Wir betrachten die Gerade $G(A, D)$. Sie schneidet OB im Inneren Punkt A und $G(O, C)$ in einem Punkt D , der nicht auf der Strecke OC liegt (Abstandsaxiom und $C \in OD$ und $C \neq D$), d.h. sie kann insbesondere die Strecke OC nicht schneiden (Inzidenzaxiom). Da $O, B, C \notin g$ muss g nach Pasch die Seite BC im Inneren schneiden. Analog folgert man, dass die Gerade $G(B, C)$ das Innere der Strecke AD schneiden muss, also insgesamt, dass sich die Strecken AD und BC im Inneren schneiden (wiederum unter Ausnutzung, der Tatsache, dass sich zwei verschiedene Geraden nur in höchstens einem Punkt schneiden können). Dieser sei mit P bezeichnet. Er liegt außerdem im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$.

Zu (b): Aus $OC \cong OA$, $OB \cong OD$ und $\angle(COB) = \angle(AOD)$ folgt mit Kongruenzaxiom [SWS] $\Delta(C, O, B) \cong \Delta(A, O, D)$ und somit $\angle(CBO) \cong \angle(ADO)$. Wegen Gleichheit der entsprechenden Winkel ergibt sich $\angle(PBA) \cong \angle(PDC)$. Weiterhin ist $|AB| = |CD|$ (Streckenarithmetik aus dem Abstandsaxiom und Voraussetzung $A \in OB$ und $C \in OD$) und $\angle(APB) \cong \angle(CPD)$ (Scheitelwinkel). Mit Kongruenzsatz [WWS] folgt $\Delta(A, B, P) \cong \Delta(C, P, D)$. Damit ergibt sich $PB \cong PD$. Da außerdem $OP = OP$ und $OB \cong OD$ nach Voraussetzung folgt $\Delta(O, B, P) \cong \Delta(O, C, P)$ mit Kongruenzsatz [SSS] und wir erhalten $\angle(DOP) \cong \angle(BOP)$. Damit ist $B \in w$ und der Strahl in O durch P ist die Winkelhalbierende w .