Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 5.12.2018

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)
(a) Beweisen Sie den Ähnlichkeitssatz [www].
(b) Beweisen Sie den Ähnlichkeitssatz [Ssw].

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ und eine Gerade g, die die Geraden $G(B, C)$ in X, $G(A, C)$ in Y und $G(A, B)$ in Z schneide. Zeigen Sie die Beziehung

$$|AZ||BX||CY| = |AY||BZ||CX|.$$

Hinweis: Fällen Sie die Lote der Eckpunkte auf g.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 (+1) Punkte)
(a) Zeigen Sie, wie aus dem Satz des Pythagoras ("Die Summe der Quadrate der Katheten ist gleich dem Quadrat der Hypothenuse") der Höhensatz und der Kathetensatz folgt, ohne noch einmal die Ähnlichkeit der Dreiecke zu nutzen.
(b) Formulieren und zeigen Sie die Umkehrung des Satzes des Pythagoras.
(c) Es sei ein Quadrat $ABCD$ gegeben, sowie ein Punkt P im Inneren des Quadrates gegeben, d.h. im Durchschnitt der Seiten bzg. der Seitengeraden in denen jeweils die anderen beiden Punkte liegen. Es sei $|AP| = 1, |BP| = 2$ sowie $|CP| = 3$. Bestimmen Sie das Maß des Winkels $\measuredangle(APB)$.
Tipp: Betrachten Sie eine zur Ausgangsfigur um $90°$ entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn in B gedrehte Figur. Untersuchen Sie die entstehenden Dreiecke. Beachten Sie, dass die Längen der Seiten des Quadrates nicht vorgegeben sind.
(Zusatz) Wie groß ist dieser Winkel, wenn P nicht im Inneren des Quadrats und auch nicht auf dessen Seiten liegt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie folgende Aussage: Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf ihr liegt. Dann ist die Menge der Punkte der Ebene, die auf derselben Seite von g wie P liegen und von g denselben Abstand haben wie P, genau die zu g parallele Gerade durch P.
Hinweis: Der Abstand eines Punktes von g ist nach Satz 19 sinnvoll als die Länge des Lotes auf g definiert.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 26.11.–29.11. besprochen werden:

a) Beweisen Sie den Ähnlichkeitssatz [sss]

b) Auf zwei Strahlen h, k in O seien je drei Punkte $A, B, C \in h$ und $D, E, F \in k$, alle verschieden von O gegeben. Es sei AE parallel zu BF und BD parallel zu CE. Zeigen Sie, dass dann AD parallel zu CF ist.

c) Zeigen Sie Lemma 28 der Vorlesung: (i) Für ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ und einen Punkt $D \in AB$ gilt für den in der Vorlesung definierten Flächeninhalt von Dreiecken:
$\mathcal{A}(\Delta(A, B, C)) = \mathcal{A}(\Delta(A, D, C)) + \mathcal{A}(\Delta(D, B, C))$.
(ii) Sind $\Delta(A, B, C) \sim \Delta(A', B', C')$ zwei ähnliche Dreiecke mit $\lambda := \frac{|A'B'|}{|AB|}$ so gilt
$\mathcal{A}(\Delta(A', B', C')) = \lambda^2 \mathcal{A}(\Delta(A, B, C))$.

d) (i) Wiederholen Sie den Beweis des Satzes von Pythagoras aus der Vorlesung.
(ii) Zeigen Sie, wie aus der Ähnlichkeit der drei rechtwinkligen Dreiecke unter Ausnutzung der Gleichheit von Streckenverhältnissen der Höhensatz und der Kathetensatz folgt.

e) Sei ein Winkel $\measuredangle(h, k)$ in O gegeben. Beweisen Sie, dass die Menge aller Punkte im Inneren des Winkels, deren Abstand zur Gerade, die zu h gehört, doppelt so groß ist, wie der Abstand zur Gerade, die zu k gehört, ein Strahl in O (ohne O) ist. Hinweis: Beschreiben Sie diese durch zwei Punkte, durch die sie verlaufen muss und beweisen Sie, dass die gefundene Gerade die gesuchte Menge ist.
Geben Sie eine Konstruktion mithilfe eines Geodreiecks an und begründen Sie diese.