Lösungshinweise Blatt 6

A:3

(a) Höhensatz:  z.z. $|CF_c|^2 = |AF_c|\cdot|BF_c|$

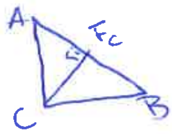
Bew:

- Pythagoras $\Delta(C,A,F_c) \Rightarrow |AF_c|^2+|CF_c|^2 = |CA|^2$
- " $\Delta(C,B,F_c) \Rightarrow |BF_c|^2+|CF_c|^2 = |CB|^2$

Summe $\Rightarrow |AF_c|^2 + 2|CF_c|^2 + |BF_c|^2 = |CA|^2+|CB|^2 \overset{\text{Pyth. } \Delta(A,B,C)}{=} |AB|^2$

$= (|AF_c|+|F_cB|)^2 = |AF_c|^2 + 2|AF_c||F_cB| + |F_cB|^2$

$\Rightarrow |CF_c|^2 = |AF_c|\cdot|BF_c|$. $\square$

Kathetensatz:  z.z. $|AC|^2 = |AF_c|\cdot|AB|$.

- Folgt analog (wie der Höhensatz) aus dem Satz von Pythagoras angewandt auf $\Delta(A,C,F_c)$, $\Delta(C,B,F_c)$, und $\Delta(A,B,C)$.

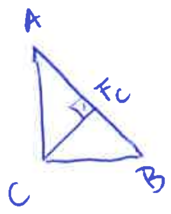
$\square$

(b) Beh: Sei $\Delta(A,B,C)$ mit $|AB|^2 = |AC|^2+|BC|^2$ gegeben. Dann gilt $|\sphericalangle(ACB)| = \pi/2$.

Bew:

- Sei F_c der Lotfußpunkt von C auf $G(A,B)$.

• Der Punkt F_c liegt zwischen A und B. [Warum?]

• 

$\Delta(A,C,F_c)$ und $\Delta(B,C,F_c)$ sind rechtwinklige Dreiecke und daher gilt:

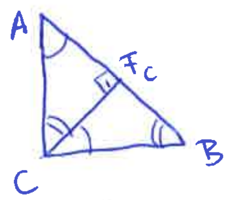
$$(1)\quad |AC|^2 = |CF_c|^2 + |AF_c|^2$$

$$(2)\quad |CB|^2 = |CF_c|^2 + |F_cB|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{|AB|^2}_{\overset{\text{Vor.}}{=}|AC|^2+|CB|^2} = \left(|AF_c| + |F_cB|\right)^2 = \underbrace{|AF_c|^2}_{\overset{(1)}{=}|AC|^2-|CF_c|^2} + 2\,|AF_c|\,|F_cB| + \underbrace{|F_cB|^2}_{\overset{(2)}{=}|CB|^2-|CF_c|^2}$$

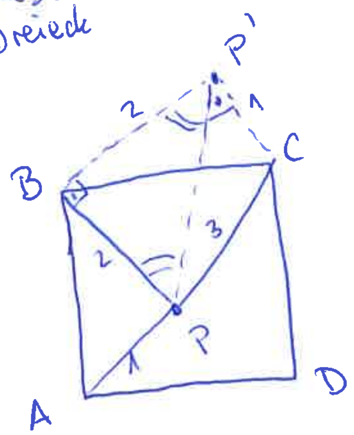
$$\overset{(1),(2)}{\underset{+\text{Vor.}}{\Rightarrow}} \quad 2\,|CF_c|^2 = 2\,|AF_c|\cdot|F_cB|$$

$$\Rightarrow \frac{|CF_c|}{|AF_c|} = \frac{|F_cB|}{|F_cC|} \overset{[SWS]}{\Rightarrow} \Delta(C,F_c,A) \sim \Delta(B,F_c,C)$$



$$\Rightarrow |\sphericalangle(ACB)| = \frac{\pi}{2}$$

Winkelsumme im Dreieck

(C) 

• $|PP'|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ (Satz v. Pyth.)

$\Rightarrow |\sphericalangle(PP'C)| = \pi/2$ nach Umkehrung Satz v. Pyth. angewandt auf $\Delta(P,P',C)$.

$$\Rightarrow |\sphericalangle(APB)| = |\sphericalangle(BP'C)|$$
$$= |\sphericalangle(BP'P)| + |\sphericalangle(PP'C)|$$
$$= 45^\circ + 90^\circ$$
$$= 135^\circ$$