Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 5.12.2018

Aufgabe: Sei ein Winkel $\measuredangle(h, k)$ in O gegeben. Beweisen Sie, dass die Menge aller Punkte im Inneren des Winkels, deren Abstand zur Gerade, die zu h gehört, doppelt so groß ist, wie der Abstand zur Gerade, die zu k gehört, ein Strahl ist. Hinweis: Beschreiben Sie diese durch zwei Punkte, durch die sie verlaufen muss und beweisen Sie, dass die gefundene Gerade die gesuchte Menge ist.
Geben Sie eine Konstruktion mithilfe eines Geodreiecks an und begründen Sie diese.

Lösung: Sei die Menge mit M bezeichnet. Sei $P \in M$ ein solcher Punkt und PF das Lot auf h und PG das Lot auf k. Dann gilt n.V. $|PF| = 2|PG|$. Sei nun weiterhin g die Lotgerade von P auf die Winkelhalbierende des Winkels. Diese schneidet beide Schenkel. Der Schnittpunkt mit h sei mit A, der mit k mit B bezeichnet, der mit der Winkelhalbierenden mit C. Das Dreieck $\Delta(O, A, B)$ ist gleichschenklig: die Basiswinkel sind kongruent, da die rechtwinkligen Dreiecke $\Delta(O, C, A)$ und $\Delta(O, C, B)$ kongruent sind (warum?). Damit sind die Dreiecke $\Delta(P, F, A)$ und $\Delta(P, G, B)$ ähnlich (warum?) und somit $|PA| = 2|PB|$. Damit ist $P \in N$ mit

$$N := \{P \in \measuredangle(h, k) | |PA| = 2|PB| \text{ mit } A \in h, B \in k, |OA| = |OB|\}$$

Insgesamt also $M \subset N$. Sei Umgekehrt $P \in N$. Die Inspektion derselben Figur, zeigt, dass die Dreiecke $\Delta(P, F, A)$ und $\Delta(P, G, B)$ ähnlich sind (warum?) und folglich $|PF| = 2|PG|$ also $N \subset M$.

Nun ist N in der Tat ein Strahl: Seien $P, P' \in N$ und $A, A' \in h$, $B, B' \in k$ die zugehörigen Punkte, d.h. $|OA| = |OB|$, $|OA'| = |OB'|$, $|PA|/|PB| = |P'A'|/|P'B'| = 2$. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt mit der Umkehrung des Strahlensatzes, dass $AB \parallel A'B'$. Der Strahl in O durch P liegt im Inneren des Winkels und schneidet folglich $A'B'$ in einem inneren Punkt. Dieser sei mit P'' bezeichnet. Nach dem Strahlensatz folgt $|P''A'|/|PA| = |OA'|/|OA| = |OB'|/|OB| = |P''B'|/|PB|$ und daraus durch Umstellen $|P''A'|/|P''B'| = |PA|/|PB| = 2$. Damit teilt P'' die Strecke $A'B'$ im gleichen Verhltnis wie P' und somit ist $P'' = P'$ (Abtragungsaxiom). Insgesamt folgt, dass P' auf dem Strahl in O durch P liegt. Da $P, P' \in N$ beliebig waren, folgt, dass N einen Strahl in O ohne O enthält. Umgekehrt folgt mit dem Strahlensatz, dass alle Punkte dieses Strahls in N liegen.

Damit haben wir auch eine Konstruktion: Konstruiere die Winkelhalbierende und in einem beliebigen Punkt darauf (außer O) die Senkrechte dazu durch diesen Punkt. Diese schneidet h und k in A bzw. B. Drittele AB: $P \in AB$ mit $|PA| = \frac{1}{3}|AB|$. Das geht z.B. mithilfe des Strahlensatzes. Der Strahl in O durch P ist die gesuchte Menge.