Übungsblatt 7

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 12.12.2018

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS].

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben seien zwei verschiedene Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$ und ein Schnittpunkt P. Zeigen Sie, dass P genau dann der einzige Schnittpunkt der Kreise ist, wenn die Kreise in P eine gemeinsame Tangente besitzen.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$ mit $M \neq N$ und legen eine Halbebene $\mathcal{H}$ der Geraden $G(M, N)$ fest. Wir definieren wie in der Vorlesung die Funktion $f : [0, \pi] \to [a, b]$ durch $f(x) := |NQ|$, wobei $Q \in K \cap \mathcal{H}$ mit $|\measuredangle(QMN)| = x$ ist. Dabei ist $a := ||MN| - r|$ und $b := |MN| + r$.
Zeigen Sie, dass f monoton wachsend und stetig ist. Zeigen Sie, dass der Wert s von f genau einmal im offenen Intervall $(0, \pi)$ angenommen wird, falls $|r - s| < |MN| < r + s$. Folgern Sie daraus, dass sich die beiden Kreise dann in genau zwei Punkten schneiden.

Es seien für die folgenden Aufgaben alle Axiome vorausgesetzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Im Inneren der Seiten AB, AC und BC eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ seien drei Punkte D, E bzw. F gegeben, so dass sich die Strecken BE, AF und CD in einem Punkt schneiden. Zeigen Sie, dass DE genau dann parallel zu BC ist, wenn F der Mittelpunkt von BC ist.

Aufgabe 4 (3 + 5 Punkte)
(a) Zeigen Sie die Irrationalität von $\sqrt{2}$, indem Sie das Abbruch-Kriterium des Euklidischen Algorithmus benutzen.
(b) Gegeben sei ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck $\Delta(A, B, C)$, dessen Schenkel die Länge 1 hat, d.h. $|AC| = |BC| = 1$ und $|AB| = \sqrt{2}$. Sei $D \in AB$, so dass $|AD| = 1$, sowie $E \in BC$, so dass $ED \perp AB$. Fertigen Sie eine Skizze an. Zeigen Sie, dass $|CE| = |BD|$. Schließen Sie daraus, dass man im zweiten Schritt des Euklidischen Algorithmus angewandt auf (AB, BC) ein Streckenpaar erhält, dass ebenfalls zu Basis und Schenkel eines (kleineren) gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks kongruent ist.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 3.12.–6.12. besprochen werden:

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS]. Für die Aufgaben d), e) und f) gelte zusätzlich das Parallelenaxiom.

a) Was ist eine Tangente an einen Kreis? Wodurch sind Tangenten charakterisiert? Wie beweist man diese Eigenschaft?

b) Wie zeigt, man, dass eine Gerade für die das Lot von einem Punkt M kleiner als eine positive Zahl r ist, den Kreis $K(M, r)$ in genau zwei Punkten schneidet?

c) Zeigen Sie, dass die Kreisscheibe eine konvexe Menge ist.

d) Zeigen Sie: Liegen zwei Punkte A, B außerhalb eines Kreises, so gibt es einen Punkt C, so dass die Strecken AC und CB komplett außerhalb des Kreises liegen.

e) Die Seitenhalbierende der Seite BC eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$ ist die Strecke AM wobei M der Mittelpunkt der Strecke BC ist. Zeigen Sie, dass sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Dieser teilt jede der drei Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ vom Eckpunkt aus betrachtet.

f) Zeigen Sie die Irrationalität von $\sqrt{3}$, indem Sie das Abbruch-Kriterium des Euklidischen Algorithmus benutzen.