Übungsblatt 7

Geometrie WS 2018/19

Lösungshinweise zur Aufgabe 2

Es gelten Inzidenz-, Abstands-, Trennungs-, Winkelmaß- und Kongruenzaxiom [SWS].

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$ mit $M \neq N$ und legen eine Halbebene $\mathcal{H}$ der Geraden $G(M, N)$ fest. Wir definieren wie in der Vorlesung die Funktion $f : [0, \pi] \to [a, b]$ durch $f(x) := |NQ|$, wobei $Q \in K \cap \mathcal{H}$ mit $|\measuredangle(QMN)| = x$ ist. Dabei ist $a := ||MN| - r|$ und $b := |MN| + r$.
Zeigen Sie, dass f monoton wachsend und stetig ist. Zeigen Sie, dass der Wert s von f genau einmal im offenen Intervall $(0, \pi)$ angenommen wird, falls $|r - s| < |MN| < r + s$. Folgern Sie daraus, dass sich die beiden Kreise dann in genau zwei Punkten schneiden.

Lösung: Fertigen Sie sich eine Skizze zum Text an.

Zur Monotonie. Sei $0 \leq x < y \leq \pi$ und $P, Q \in K \cap \mathcal{H}$ mit $|\measuredangle(QMN)| = x, |\measuredangle(PMN)| = y$. Wir wenden Aufgabe 3, Blatt 5 auf die Dreiecke $\Delta(P, M, N)$ und $\Delta(Q, M, N)$ an. Es gilt nach Vorauss. $|QM| = |PM|, MN = MN$ sowie $|\measuredangle(PMN)| > |\measuredangle(QMN)|$. Dann folgt $f(x) = |QN| < |PN| = f(y)$ und somit die Monotonie.

Aus der Dreiecksungleichung folgt $|f(y) - f(x)| = ||QN| - |PN|| \leq |PQ|$. Wenn die Zuordnung, die ein $x \in [0, \pi]$ auf den Punkt $Q \in K$ abbildet, stetig ist, wären wir fertig: Sei $x \in [0, \pi]$ fixiert. Sei $\epsilon > 0$ dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $y \in [0, \pi]$ aus $|x - y| < \delta$ $|PQ| < \epsilon$ folgt. Somit folgt dann auch $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ und die Stetigkeit. Wenn Sie die Stetigkeit der Zuordnung nicht gezeigt haben, wird Ihre Lösung trotzdem als vollständig angesehen.

Zur Stetigkeit der Zuordnung: Sei t die Tangente an K in Q und $R, S \in t$, so dass $|QR| = |QS| = \epsilon$. Setzen $\delta := |\measuredangle(QMR)| = |\measuredangle(QMS)|$. Seien R' und S' die Schnittpunkt der Strahlen in M durch R bzw. S mit dem Kreis K. Die Dreiecke $\Delta(M, Q, S')$ und $\Delta(M, Q, R')$ sind gleichschenklig und ihre Basiswinkel gleichgroß und demzufolge spitz. In den Dreiecken $\Delta(R, R', Q)$ und $\Delta(S, S', Q)$ sind die Innenwinkel in R' und S' Nebenwinkel dieser Winkel also stumpf. Da dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt folgt $|QS'| < |QS| = \epsilon$ und $|QR'| < |QR| = \epsilon$. Ist nun $y \in [0, \pi]$ mit $|x - y| < \delta$ und P der zu y gehörende Punkt auf K, so folgt $|QP| < |QR'|$ oder $|QP| < |QS'|$ da der Strahl in M durch P im Inneren von $\measuredangle(RMS)$ liegt, also $|QP| < \epsilon$ und somit $|f(y) - f(x)| \leq |QP| < \epsilon$. Damit ist die Stetigkeit von f gezeigt.

Nun ist $f(0) = ||MN| - r| < s$ und $f(\pi) = |MN| + r > s$ also muss es genau ein $x \in (0, \pi)$ mit $f(x) = s$. Das ist aber genau die Bedingung für $Q \in K$ auch auf L zu liegen. D.h. in $\mathcal{H}$ gibt es genau einen Punkt aus $K \cap L$. Auf der anderen Seite liegt analog ebenfalls genau einer, auf der Geraden $G(M, N)$ liegt wegen der Bedingung $|r - s| < |MN| < r + s$ kein Schnittpunkt.