Übungsblatt 7

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschläge für die Rückseite

Es gelten alle Axiome.

Aufgabe: Zeigen Sie: Liegen zwei Punkte A, B außerhalb eines Kreises, so gibt es einen Punkt C, so dass die Strecken AC und CB komplett außerhalb des Kreises liegen.

Lösung: Angenommen die Strecke AB liegt vollständig im Äußeren des Kreises, dann können wir $C \in AB$ wählen. Der Kreis sei $K = K(M, r)$ mit Mittelpunkt M. Zunächst sei die Idee für die vollständige Lösung unter Ausschluss des speziellen Falles $M \in AB$ erläutert (nach Eren Ucar). Wir betrachten die Senkrechten h, k zu MA und MB durch A bzw. B. Da die Länge der Lote MA und MB auf diese größer als der Radius r ist, liegen sie komplett außerhalb von K.

Andererseits können sie nicht parallel sein: Seien $D \in h$ und $E \in k$, so dass D und B auf einer Seite von $G(A, M)$ sowie E und A auf einer Seite von $G(B, M)$ liegen. Dann liegt insbesondere B im Inneren von $\measuredangle(DAM)$ und somit $|\measuredangle(DAB)| < |\measuredangle(DAM)| = \frac{\pi}{2}$, Letzteres nach Voraussetzung. Analog ist $|\measuredangle(EBA)| < \frac{\pi}{2}$, d.h. beide Winkel sind spitz. Da sie Gegenwinkel von h und k an der sie schneidenden Geraden $G(A, B)$ sind, folgt, dass h und k nicht parallel sein können, da dies dem Gegenwinkelsatz widersprechen würde. Es folgt sogar, dass der Schnittpunkt C von h und k auf derselben Seite von $G(A, B)$ wie D und E liegt. Der Punkt C ist der gesuchte Punkt.

Anmerkung: (1) Dies ist eine mögliche Argumentation um zu zeigen, dass sich zwei Mittelsenkrechten in einem Dreieck schneiden, falls das Parallelenaxiom gilt (Übungsblatt 5, Aufgabe 1 (b)). (2) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, falls das Parallelenaxiom nicht gilt.

Den Fall $M \in AB$ führt man nun zurück auf den Fall $M \notin AB$. Man wähle z.B. eine Gerade k durch B, die komplett im Äußeren von K verläuft und nicht senkrecht auf MB steht (warum gibt es die?). Sei MB' der Lot von M darauf. Dann ist $B' \notin G(A, B)$ und somit $M \notin AB'$. Dann schneiden sich aufgrund der obigen Diskussion die Senkrechte zu MA h durch A und k in einem Punkt C und diese erfüllt die geforderte Bedingung.

Aufgabe: Zeigen Sie die Irrationalität von $\sqrt{3}$, indem Sie das Abbruch-Kriterium des Euklidischen Algorithmus benutzen.

Lösung: Angenommen, $\sqrt{3}$ wäre rational, dann muss der Euklidische Algorithmus mit 1 abbrechen. Es ergeben sich aber nacheinander folgende Paare

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}, 1) &\mapsto \sqrt{3} - 1 \\ (1, \sqrt{3} - 1) &\mapsto 2 - \sqrt{3} \\ (\sqrt{3} - 1, 2 - \sqrt{3}) &\mapsto 2\sqrt{3} - 3 \\ (2\sqrt{3} - 3, 2 - \sqrt{3}).&\end{aligned}$$

Nun ist $(2\sqrt{3} - 3, 2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})(\sqrt{3}, 1)$. Das bedeutet, dass sich für alle $n \in \mathbb{N}$ nach $3n$ Schritten das Paar $(2 - \sqrt{3})^n(\sqrt{3}, 1)$ ergibt und der Algorithmus folglich nicht abbricht.

Oder

dass nach jedem dritten Schritt das Verhältnis der beiden Zahlen wieder gleich $\sqrt{3}$ ist, nach dem darauffolgenden Schritt gleich $1/(\sqrt{3} - 1)$ und danach gleich $(\sqrt{3} - 1)/(2 - \sqrt{3})$, also niemals gleich 1 und der Algorithmus folglich nicht abbricht.

Frage: Finden Sie eine geometrische Interpretation der obigen Folge irrationaler Zahlen und somit einen geometrischen Beweis der Irrationalität von $\sqrt{3}$?