Übungsblatt 8

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 19.12.2018

Für die folgenden Aufgaben sind alle bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt.

Aufgabe 1 (4+2+2+2 Punkte)
Sei ein Kreis $K = K(M, r)$ sowie ein Punkt P außerhalb von K gegeben.
(a) Zeigen Sie, dass es genau zwei Tangenten an K gibt, die durch P verlaufen. Hinweis: Da das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt ist, dürfen Sie dafür weder die auf der Rückseite diskutierte Konstruktion noch den Satz des Pythagoras verwenden. Kleiner Tipp: Anstatt wie beim Schnittverhalten von Kreisen (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 2) mit Stetigkeit zu argumentieren (was prinzipiell möglich ist), kann man die Berührpunkte auch direkt konstruieren. Das Resultat der Aufgabe (e) (i) der Rückseite kann dabei hilfreich sein.
(b) Seien $A, B \in K$ die Berührpunkte dieser zwei Tangenten und $C \in K$ ein Punkt im Inneren des Dreiecks $\Delta(A, B, P)$. Sei weiterhin t die Tangente an K in C. Zeigen Sie, dass t die Strecken PA und PB im Inneren schneidet. Diese Punkte seien mit D bzw. E bezeichnet.
(c) Zeigen Sie, dass der Umfang des Dreiecks $\Delta(P, D, E)$ nicht von der Wahl des Punktes C abhängt
(d) Zeigen Sie, dass das Winkelmaß $|\measuredangle(DME)|$ nicht von der Wahl des Punktes C abhängt.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Für diese Aufgabe sei zusätzlich das Parallelenaxiom vorausgesetzt.
Sei K ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r > 0$. Sei $P \in K$ ein Punkt darauf. Beweisen Sie, dass die Menge aller Mittelpunkte der Strecken PQ wobei $Q \in K$ wieder ein Kreis ist. Bestimmen Sie dessen Mittelpunkt und Radius. Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie wie schon bei Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende begründen, dass der gefundene Kreis alle gesuchten Punkte enthält und jeder solche Punkt auch darauf liegt.

Aufgabe 3 (4+ 1 + 1 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass sich die Winkelhalbierenden in einem Dreieck immer in einem Punkt schneiden.
(b) Begründen Sie, dass jedes Dreieck genau einen Inkreis besitzt, d.h. einen Kreis, der tangential an alle drei Seiten ist.
(c) Zeigen Sie das der Inkreis eines Dreiecks vollständig im Inneren des Dreiecks liegt, bis auf die drei Berührpunkte mit den Seiten des Dreiecks.

Aufgabe 4 (7 Punkte)
Für diese Aufgabe sei zusätzlich das Parallelenaxiom vorausgesetzt.
Gegeben sei ein Winkel $\measuredangle(h, k)$ sowie ein Punkt P im Inneren des Winkels. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die tangential an die Strahlen h und k sind und durch P verlaufen.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 10.12.–13.12. besprochen werden:

Es alle gelten Axiome.

a) Beweisen Sie den Satz des Thales: Jeder Umfangswinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.

b) Diskutieren Sie mögliche Umkehrungen und beweisen Sie diese.

c) Gegeben sei ein Kreis K mit Mittelpunkt M sowie eine Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruieren Sie alle Tangenten an den Kreis, die durch den Punkt P verlaufen. Diskutieren Sie Vollständigkeit, Korrektheit und Durchführbarkeit Ihrer Lösung. Wieviele Tangenten gibt es?

d) Für die Situation der vorhergehenden Aufgabe: Seien A und B die Berührpunkte zweier solcher Tangenten. Zeigen Sie, dass $PA \cong PB$ und $\measuredangle(AMP) \cong \measuredangle(BMP)$.

e) (i) Beweisen Sie folgende Aussage: Ist $\alpha \in (0, \pi)$ eine reelle Zahl und $a > b > 0$ zwei positive reelle Zahlen, so gibt es genau ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit $\alpha = \measuredangle(BAC), a = |BC|$ und $b = |AC|$. Unter welcher Bedingung ist die Aussage für $a = b > 0$ richtig?
(ii) Beweisen Sie folgende Aussage: Sind $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ zwei reelle Zahlen mit $\alpha + \beta < \pi$ und $c > 0$ eine positive reelle Zahl, so gibt es ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ mit $\alpha = |\measuredangle(BAC)|, \beta = |\measuredangle(ABC)|s$ und $c = |AB|$.
(iii) Für welche der beiden Aufgaben wird im Allgemeinen das Parallelenaxiom benötigt?

f) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die $K(M, r)$ in genau einem gegebenen Punkt $P \in K$ schneiden und durch einen anderen Punkt Q gehen.

g) Seien zwei parallele Geraden und ein Punkt gegeben, der zwischen ihnen liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die jede der beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden und P enthalten.