Übungsblatt 8

Geometrie WS 2018/19

Lösungshinweise zur Aufgabe 1

Für die folgende Aufgabe sind alle bis auf das Parallelenaxiom vorausgesetzt.

Aufgabe 1 (4+2+2+2 Punkte)
Sei ein Kreis $K = K(M, r)$ sowie ein Punkt P außerhalb von K gegeben.
(a) Zeigen Sie, dass es genau zwei Tangenten an K gibt, die durch P verlaufen. Hinweis: Da das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt ist, dürfen Sie dafür weder die auf der Rückseite diskutierte Konstruktion noch den Satz des Pythagoras verwenden. Kleiner Tipp: Anstatt wie beim Schnittverhalten von Kreisen (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 2) mit Stetigkeit zu argumentieren (was prinzipiell möglich ist), kann man die Berührpunkte auch direkt konstruieren. Das Resultat der Aufgabe (e) (i) der Rückseite kann dabei hilfreich sein.
(b) Seien $A, B \in K$ die Berührpunkte dieser zwei Tangenten und $C \in K$ ein Punkt im Inneren des Dreiecks $\Delta(A, B, P)$. Sei weiterhin t die Tangente an K in C. Zeigen Sie, dass t die Strecken PA und PB im Inneren schneidet. Diese Punkte seien mit D bzw. E bezeichnet.
(c) Zeigen Sie, dass der Umfang des Dreiecks $\Delta(P, D, E)$ nicht von der Wahl des Punktes C abhängt
(d) Zeigen Sie, dass das Winkelmaß $|\measuredangle(DME)|$ nicht von der Wahl des Punktes C abhängt.

Lösung: Zu (a) $G(A, P)$ mit $A \in K$ ist eine Tangente genai dann, wenn die senkrecht auf MA steht. Das bedeutet, dass $\Delta(P, M, A)$ rechtwinklig in A mit gegeben Seiten $|MA| = r$ und $d := |MP|$ ist. Dann gibt es ein Dreieck $\Delta(C, D, E)$ mit rechtem Winkel in E, $|CD| = d$ und $|CE| = r$. nach Aufgabe (e) (i) der Rückseite. Der Kreis $K(P, R)$ mit $R := |DE|$ schneidet dann K in zwei Punkten: A und B (nach Satz aus der Vorlesung über Scvhnittverhalten von Kreisen). Nach Kongruenzsatz [SSS] sind die Dreiecke $\Delta(M, P, A) \cong \Delta(M, P, B) \cong \Delta(C, D, E)$ also stehen MA und PA bzw. MB und PB senkrecht aufeinander und $G(P, A)$ und $G(P, B)$ sind Tangenten. Insbesondere folgt aus der Tatsache, dass die Kreise genau zwei Schnittpunkte aufweisen auch, dass es genau zwei Tangenten gibt.
Zu (b) Analog zur Aufgabe (d) der Rückseite gilt $|PA| = |PB|$ und $\measuredangle(AMP) \cong \measuredangle(BMP)$ (Parallelenaxiom wird nicht benötigt). Genauso folgt $|DA| = |DC|$ und $|EB| = |EC|$ und somit für den Umfang

$$|DE| + |PD| + |PE| = |DC| + |EC| + |PD| + |PE| = |DA| + |PD| + |EB| + |PE| = |PA| + |PB|$$

ist also unabhängig von C.
Ähnlich schließt man

$$|\measuredangle(DME)| = \frac{1}{2}|\measuredangle(AMB)|.$$