Übungsblatt 8

Geometrie WS 2018/19

Lösungsvorschläge für die Rückseite

Aufgabe: Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die sich mit $K(M, r)$ genau einen gegebenen Punkt $P \in K$ schneiden und durch einen anderen Punkt Q gehen.

Lösung: Sei $L = K(N, s)$ ein solcher Kreis. Da $|PN| = |QN| = s$ liegt N auf der Mittelsenkrechten von PQ. P, Q und N liegen auf einer Geraden, da die Kreise genau einen Punkt gemeinsam haben. Also muss N im Durchschnitt der Mittelsenkrechten und der Geraden durch M und P liegen. Die Geraden können nicht identisch sein, allerdings parallel, nämlich genau dann, wenn Q auf der Tangenten an K durch P liegt. Dann gibt es keine Lösung!

Die (sehr) kurze Konstruktionsbeschreibung können Sie sich selbst überlegen.

Sei also N der Durchschnitt. Sei $L := K(N, s)$ der konstruierte Kreis mit $s := |NP| = |NQ|$. Letzte Gleichung gilt, da N auf der Mittelsenkrechten von PQ liegt. Da $N \in G(P, Q)$ Berühren sich K und L genau im Punkt P.

Aufgabe: Seien zwei parallele Geraden g und h und ein Punkt P gegeben, der zwischen ihnen liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die jede der beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden und P enthalten.

Lösung: Sei $K(M, r)$ dieser Kreis. M hat dann von jeder der beiden Geraden g und h den Abstand r. Seien F und G die Fußpunkte der beiden Lote auf die Geraden. Die Gerade $G(M, F)$ steht senkrecht auf g. Sie steht dann ebenfalls senkrecht auf h (Stufenwinkelsatz). Damit liegen F, G und M auf einer Geraden und $|FG| = 2r$.

Sei $K(N, s)$ ein weiterer Kreis, der beide Geraden berührt. Für alle Punkte $P \in h$ ist der Abstand von P zu g gleich, also gleich $2r$. Damit ist $s = r$. Die Senkrechte zu FG durch M ist ebenfalls parallel zu g und zu h und ale Punkte darauf haben den Abstand r zu g und zu h. Somit liegt M auf dieser Senkrechten.

Weiterhin liegen alle Mittelpunkte von Kreisen vom Radius r, die P enthalten, auf dem Kreis $K(P, r)$.

Kurze Beschreibung der Konstruktion: Konstruiere eine Senkrechte zu g. Die schneide g in A und B. Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB. Der Mittelpunkt sei C. Konstruiere den Kreis $K(P, r)$ mit $r = |AM|$. Der Abstand von P zur Mittelsenkrechten ist kleiner als r. Daher schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, M und N.

Die Kreise $K(M, r)$ und $K(N, r)$ enthalten P und sind tangential an g und h. Das ist in dieser Aufgabe offensichtlich.