Übungsblatt 9

Geometrie WS 2018/19

Abgabe: 9.1.2018

Für alle Aufgaben gelten alle Axiome.

Aufgabe 1 (2 + 5 Punkte)
(i) Beweisen Sie die folgende Umkehrung des Sehnen-Tangentenwinkelsatzes: Sei AB eine Sehne des Kreises K, g eine Gerade durch B, die A nicht enthält, sowie $E \in g \setminus \{B\}$ und $C \in K \setminus \{A; B\}$, so dass E und C auf verschiedenen Seiten von $G(A, B)$ liegen. Ist $\measuredangle(EBA) \cong \measuredangle(ACB)$ so ist g eine Tangente an K.
(ii) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Konstruktion einer Tangenten an einen Kreis K in einem Punkt P auf dem Kreis ("Euclidea 3.5"): (1) Wähle einen weiteren Punkt $Q \in K$, so dass PQ KEIN Durchmesser von K ist. (2) Bestimme den zweiten Schnittpunkt, R (neben P) des Kreises $L := K(Q, |PQ|)$ mit K. (3) Bestimme zweiten Schnittpunkt, S (neben R) des Kreises $K(P, |PR|)$ mit L. (4) Die Gerade $G(P, S)$ ist die Tangente. Bemerkung: Für die Konstruktion wird der Mittelpunkt von K nicht benötigt.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)
(i) Seien K und L zwei Kreise, die genau einen Punkt P gemeinsam haben und sich von außen berühren. Sei weiterhin g eine Gerade, die beide Kreise tangential in $Q \in K$ bzw. $R \in L$ berührt, so dass diese, bis auf die Berührpunkte, auf einer Seite der Geraden liegen.
Beweisen Sie, dass $\measuredangle(QPR)$ ein rechter Winkel ist.
(ii) Seien K und L zwei Kreise, die sich in genau zwei Punkten P und Q schneiden. Sei $R \in K$, so dass PR ein Durchmesser von K ist, sowie $S \in L$, so dass PS ein Durchmesser von L ist.
Zeigen Sie, dass Q, R und S auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Hinweis: Hier muss ggf. eine Fallunterscheidung für die Lagebeziehung von R und S gemacht werden.

Aufgabe 3 (5 + 2 Punkte)
Gegeben sei ein Kreis $K = K(M, r)$ sowie eine Strecke PQ.
(i) Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Sehnen, des Kreises, die kongruent und parallel zu PQ sind. Diskutieren Sie die Durchführbarkeit, Korrektheit und Vollständigkeit Ihrer Konstruktion. Wieviele Lösungen gibt es? (Hinweis: AB und BA werden nicht unterschieden).
(ii) Seien AB und CD zwei verschiedene solche Sehnen. Zeigen Sie, dass die vier Punkte A, B, C, D ein Rechteck bilden.

Aufgabe 4 (5 + 3 Punkte)
(i) Gegeben seien zwei parallele Geraden, sowie ein Kreis $K = K(M, r)$, der komplett dazwischen liegt. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Kreise, die die beiden Geraden und den Kreis jeweils in genau einem Punkt berühren.
(ii) Erläutern Sie was sich ändert, wenn der Kreis bezüglich der Geraden beliebig liegen darf.

a) Formulieren Sie den Sehnen-Tangenten-Satz und den Umfangswinkelsatz. Wiederholen Sie deren Beweise aus der Vorlesung.

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 17.12.–20.12. besprochen werden:

b) Formulieren Sie den Satz über das Sehnenviereck und eine Umkehrung (das Parallelenaxiom vorausgesetzt).

c) Zeigen Sie, ohne das Parallelenaxiom zu benutzen: In einem Sehnenviereck ist die Summe der Winkelmaße der gegenüberliegenden Ecken gleich. Folgern Sie den Satz über das Sehnenviereck MIT Parallelenaxiom und diskutieren Sie, wie seine Umkehrung gezeigt werden kann.

d) (*) Wie könnte ein Beweis der folgenden Umkehrung von (c) aussehen: In einem Viereck sei die Summe der Winkelmaße der gegenüberliegenden Ecken gleich UND drei Ecken liegen auf einem Kreis. Zeigen Sie, dass es dann ein Sehnenviereck ist. Anmerkung: Ohne die zweite Bedingung ist die Aussage im Allgemeinen falsch, wenn das Parallelenaxiom verletzt ist.

e) Seien K und L zwei Kreise, die genau einen Punkt P gemeinsam haben. Zwei Geraden g und h durch P schneiden K und L in A und C bzw. B und D. Zeigen Sie dass $AB \parallel CD$.
Hinweis: Wie können die Kreise zueinander liegen? Machen Sie ggf. eine Fallunterscheidung.

f) Seien K und L zwei Kreise, die sich in genau zwei Punkten P und Q schneiden. Sei weiterhin g eine Gerade, die beide Kreise tangential in $R \in K$ bzw. $S \in L$ berührt, so dass diese, bis auf die Berührpunkte, auf einer Seite der Geraden liegen. Zeigen Sie, dass $\measuredangle(RQS)$ und $\measuredangle(RPS)$ Nebenwinkel zueinander sind.

g) Gegeben seien zwei Kreise $K = K(M, r)$ und $L = K(N, s)$ mit ihren Mittelpunkte. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Geraden, die gleichzeitig Tangenten an K und an L sind. Beschrnken Sie sich zunächst auf den Fall, dass die Kreise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.